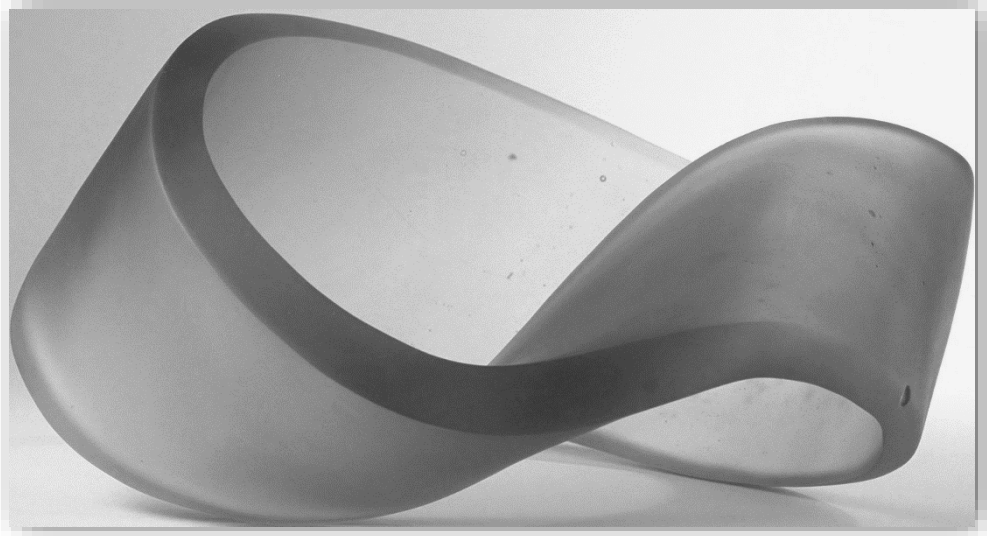




ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ ΣΥΜΠΑΓΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ ΜΕ
ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΤΟΥ CONWAY &
ΧΡΩΜΑΤΙΣΜΟΙ ΧΑΡΤΩΝ



Διπλωματική Εργασία

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΕΥΘΥΜΙΟΥ

Επιβλέπων Καθηγητής: Κοντοκώστας Δημήτριος,
Επίκουρος Καθηγητής Ε.Μ.Π.

ΑΘΗΝΑ, Σεπτέμβριος 2018



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ
ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Επιβλέπων: Κοντοκόστας Δημήτριος

Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 13^η Σεπτεμβρίου 2018:

Κοντοκόστας Δημήτριος
Επ. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Σμυρλής Γεώργιος
Αν. Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Ψαρράκος Παναγιώτης
Καθηγητής Ε.Μ.Π.

Αθήνα, Σεπτέμβριος 2018

Περίληψη

Η Τοπολογία αποτελεί ένα σημαντικό κλάδο των μαθηματικών, και ιδιαιτέρως των σύγχρονων μαθηματικών. Ιστορικά η τοπολογία ξεκίνησε από τη δημοσίευση του Γάλλου μαθηματικού Henri Poincare το 1895 με τίτλο *Analysis Situs* ή «Ανάλυση Θέσης» και θεωρείται το δεύτερο όνομα της. Η μελέτη της τοπολογίας επικεντρώνεται στους τομείς της γεωμετρίας (γεωμετρική τοπολογία) και της συνολοθεωρίας (γενική τοπολογία). Η γενική τοπολογία ασχολείται με τη θεωρία συνόλων και αποτελεί θεμέλιο για την ανάπτυξη άλλων κλάδων, όπως η αλγεβρική και η διαφορική τοπολογία. Αντίθετα η γεωμετρική, ασχολείται κυρίως με πολλαπλότητες, που περιλαμβάνουν τις γνωστές μας καμπύλες και επιφάνειες. Οι επιφάνειες, που θα τις δούμε ως πολλαπλότητες, μπορούν να παραμορφώνονται, δηλαδή να τεντώνονται, να στρίβουν, να λυγίζουν και να συρρικνώνονται, παραμένοντας όμως τοπολογικά ισοδύναμες. Ωστόσο, σε αυτές τις συνεχείς παραμορφώσεις υπάρχουν κάποιοι περιορισμοί. Δεν έχουμε το δικαίωμα να σκίσουμε ή να κολλάμε κομμάτια της επιφάνειας μεταξύ τους.

Παρότι είναι μεγάλο και ποικιλόμορφο το εύρος των μορφών των επιφανειών που συναντάμε σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών, από την ανάλυση μέχρι και τα δυναμικά συστήματα, το θεώρημα ταξινόμησης μας εξασφαλίζει ότι οι ποικίλες μορφές των κλειστών αυτών επιφανειών είναι τοπολογικά ισοδύναμες με σφαίρες που διαθέτουν αριθμό χερουλιών ή τεμνόμενων σκούφων. Ανάλυση για την ταξινόμηση και την ισοδυναμία των επιφανειών θα δούμε στο τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο. Σκοπός του θεωρήματος είναι να τις ταξινομούμε και ως προς τον προσανατολισμό τους. Αξίζει να σημειώσουμε ότι υπάρχουν αρκετοί τρόποι απόδειξης του θεωρήματος αλλά επιλέξαμε την απόδειξη του μαθηματικού J.H. Conway γνωστή με το όνομα *απόδειξη ZIP*, που είναι πολύ εποπτική και χρησιμοποιεί το φερμουάρ (zip στα αγγλικά) ως εποπτικό βοήθημα.

Τέλος, θα ασχοληθούμε με ένα ενδιαφέρον θέμα των μοντέρνων μαθηματικών και αυτό είναι οι χρωματισμοί χαρτών στις επιφάνειες ιδιαιτέρως στο επίπεδο. Για τη μαθηματικοποίηση του προβλήματος, θα υπάρξουν κάποιες λογικές διαφοροποιήσεις στον ορισμό του χάρτη, από την συνήθη έννοια του όρου, διότι ο χάρτης μας θα παράγεται από την πολυγωνική διαμέριση της επιφάνειας. Σκοπός μας θα είναι η διερεύνηση του ελαχίστου αριθμού χρωμάτων που απαιτείται για τον χρωματισμό ενός

χάρτη πάνω σε μια κλειστή επιφάνεια ώστε να μην υπάρχουν δύο γειτονικές χώρες με το ίδιο χρώμα.

Abstract

One of the most important branches of modern mathematics is topology. Its object of study is manifolds with their properties. Geometry and set-theory were the sectors on which topology was developed. Historically, it was at 1895 when topology firstly became field of mathematics because of the Henri's Poincare publication titled "Analysis Situs" which was the first name of topology. The study of topology splits in the fields of set-theory (general topology) and geometric topology. Geometric topology deals mainly with manifolds like curves and surfaces. Surfaces can be deformed, namely stretch, twist, bend and shrink. However, they remain topologically equivalent. Moreover, these continuous deformations will have some limits. Specifically, we can't tear apart or glue together portions of surfaces to each other.

Although there is a wide range for the forms of surfaces at many fields of mathematics, from analysis to dynamical systems, the classification theorem asserts that these different forms of closed surfaces are topological equivalent with spheres which have a number of handles or crosscaps. This procedure of classification and equivalence surface will be presented at the second and third chapters. Suffice it to say that the specific theorem has a variety of proof but we chose Conway's ZIP proof because of its intuitive nature.

Finally, an interesting topic of modern mathematics is coloring maps on surfaces. We will make some changes at the map's definition in order to explain this topic in terms of mathematics. Our maps will be created from the polygonal subdivisions of the surfaces. Our goal will be to investigate the minimum number required to color the map on a closed surface so that two neighboring countries exist with the same color.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κο Δημήτρη Κοντοκώστα για την βοήθεια του στην επίβλεψη και την υλοποίηση της διπλωματικής μου εργασίας. Η συνεργασία μας που ξεκίνησε από το 4ο έτος φοίτησης μου στο πολυτεχνείο, όπου και δημιουργήσαμε ομάδα για την Βραδιά του Ερευνητή, αποδείχθηκε εξαιρετική καθότι ασχολήθηκα με ένα κλάδο των μαθηματικών που δεν μου είχαν προσφέρει τα μαθήματα της σχολής. Μέσα από τις συναντήσεις μας και τις ώρες που μου αφιέρωσε, με βοήθησε να αναπτύξω τη μαθηματική μου σκέψη και να γνωρίσω νέες έννοιες στα μαθηματικά. Τέλος, τον ευχαριστώ ιδιαίτερα για την στήριξη που μου παρείχε.

Επίσης, θέλω να ευχαριστήσω για τη παρουσία τους τα μέλη της εξεταστικής επιτροπής, κο Γεώργιο Σμυρλή και κο Παναγιώτη Ψαρράκο.

Τέλος, θέλω να ευχαριστήσω την οικογένεια μου, τη κοπέλα μου και τους φίλους μου που μου παρείχαν κάθε είδους βοήθεια κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Περιεχόμενα

Περίληψη.....	4
Abstract.....	6
Ευχαριστίες.....	7
Περιεχόμενα.....	8
<u>1^ο Κεφάλαιο</u> : Ορισμένες Τοπολογικές Ιδιότητες.....	9
1.1 Κατασκευή αντικειμένων από επίπεδα μοντέλα.....	12
1.2 Επιφάνειες.....	14
<u>2^ο Κεφάλαιο</u> : Ταξινόμηση συμπαγών επιφανειών.....	20
2.1 Θεώρημα Ταξινόμησης.....	25
<u>3^ο Κεφάλαιο</u> : Απόδειξη του Conway.....	26
<u>4^ο Κεφάλαιο</u> : Χρωματισμοί χαρτών.....	36
Επίλογος.....	42
Βιβλιογραφία.....	43

Κεφάλαιο 1

Ορισμένες Τοπολογικές Ιδιότητες

Στην Ευκλείδεια Γεωμετρία τα σχήματα μπορούν να υφίστανται μετασχηματισμούς και να θεωρούνται ισοδύναμα ή αλλιώς όμοια. Αντίθετα, η τοπολογία μας δίνει μια πιο χαλαρή ιδέα για την ισοδυναμία στα σχήματα. Πρόκειται να ασχοληθούμε με συμπαγείς επιφάνειες (με και χωρίς σύνορο) που έχουν επίπεδα πολυγωνικά μοντέλα, γνωστές και ως δισδιάστατες πολλαπλότητες.

Τοπολογία είναι ο κλάδος των μαθηματικών που ασχολείται με εκείνες τις ιδιότητες των αντικειμένων που δεν επηρεάζονται όταν υφίστανται συνεχείς παραμορφώσεις.

Λόγω της γενικότητας του ορισμού, οφείλουμε να αποσαφηνίσουμε τις έννοιες «αντικείμενο» και «συνεχής παραμόρφωση».

Με τον όρο **αντικείμενα** θα εννοούμε ένα σύνολο σημείων στο χώρο και λέγοντας ότι μπορεί να παραμορφωθεί σε κάποιο άλλο θα λέμε ότι μπορούμε να το τεντώνουμε, να το λυγίζουμε, να το πιέζουμε και να το στρίβουμε αλλά όχι να το σκίζουμε και με αυτήν την ενέργεια υποδηλώνουμε την έννοια **συνεχής παραμόρφωση**.

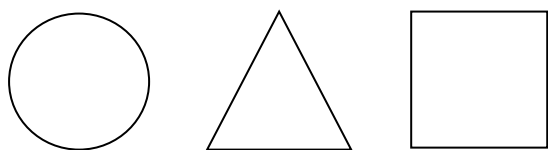
Ορισμός 1.1

Αν ένα αντικείμενο μπορεί να παραμορφωθεί έτσι ώστε να συμπίπτει με ένα δεύτερο αντικείμενο τότε αυτά λέγονται *ισοτοπικά* μεταξύ τους. (Υπάρχει αυστηρός μαθηματικός ορισμός της ισοτοπίας, αλλά δεν θα χρειαστεί περαιτέρω επέκταση).

Για την καλύτερη κατανόηση περί ισοτοπίας μεταξύ των αντικειμένων παραθέτουμε μερικά παραδείγματα (Παραδείγματα 1.1-1.4).

Παράδειγμα 1.1

Υποθέτουμε μία κλειστή καμπύλη σε σχήμα κύκλου ότι είναι λαστιχένια. Είναι εύκολο να δούμε ότι η καμπύλη κάτω από συνεχείς παραμορφώσεις μπορεί να πάρει προσεγγιστικά τα σχήματα κύκλου, τριγώνου και τετραγώνου. Επομένως, μπορούμε να πούμε ότι αν δούμε τις 3 κλειστές καμπύλες ως αντικείμενα τότε είναι ισοτοπικά μεταξύ τους (Εικόνα 1).



Εικόνα 1. Τρεις ισοτοπικές καμπύλες κύκλου, τριγώνου και τετράγωνου

Παράδειγμα 1.2

Αν θεωρήσουμε ένα κύβο από καουτσούκ τότε μπορούμε να τον παραμορφώσουμε μέχρι να πάρει τη μορφή σφαίρας. Ομοίως και τη σφαίρα μπορούμε να την παραμορφώσουμε με τέτοιο τρόπο ώστε να πάρει, προσεγγιστικά, το σχήμα κύβου. Επομένως αυτά τα σχήματα είναι ισοτοπικά μεταξύ τους.

Παράδειγμα 1.3

Η σφαίρα δεν είναι ισοτοπική με τον τόρο (επιφάνεια σαμπρέλας). Αυτό συμβαίνει διότι ο τόρος έχει τρύπα ενώ η σφαίρα δεν έχει. Επίσης η σφαίρα έχει την ιδιότητα ότι κάθε κύκλος πάνω στην επιφάνεια της μπορεί να συρρικνωθεί σε ένα σημείο, κάτι που δεν συμβαίνει στο τόρο. Οπότε οποιοδήποτε αντικείμενο πρέπει να έχει την ίδια ιδιότητα για να θεωρηθεί ισοτοπικό με τη σφαίρα.

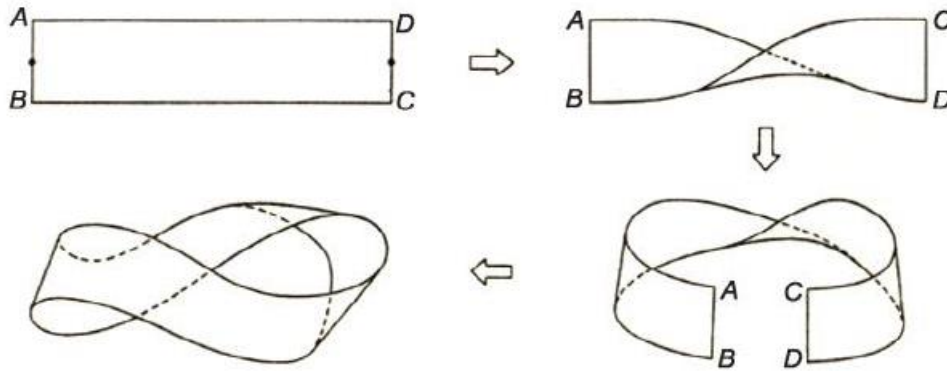
Παρατήρηση: Επειδή στη συνέχεια θεωρούμε ότι κατασκευάζουμε επιφάνειες από τετραγωνικό χαρτί, είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι δεν πρέπει να θεωρούμε ισοτοπικό το κύλινδρο με το τετράγωνο διότι για να προκύψει ο κύλινδρος πρέπει να κολλήσουμε τις πλευρές του τετραγώνου και αυτό δεν επιτρέπεται στη τοπολογία.

Τον κύλινδρο θα τον θεωρούμε ανοιχτή επιφάνεια, σαν ανοιχτό σωλήνα από τον οποίο έχουμε αφαιρέσει τον πάτο και την κορυφή του. Όμως, τους συνοριακούς κύκλους των δύο άκρων του θα τους συμπεριλαμβάνουμε μέσα σ αυτόν.

Παράδειγμα 1.4

Λωρίδα Mobius

Σε ένα τετραγωνικό χαρτί με άκρα τα A, B, C, D καθώς πάμε να φτιάξουμε ένα κύλινδρο, στρίβοντας τις άκρες από τη μία πλευρά πριν φτάσουν στα άκρα της άλλης πλευράς παίρνουμε τη λωρίδα Mobius (Εικόνα 2).



Εικόνα 2. Κατασκευή λωρίδας Möbius [Park, 2014]

Όπως αναφέραμε, ο κύλινδρος έχει 2 διακριτές συνοριακές κλειστές καμπύλες, αντίθετα όμως η λωρίδα Möbius έχει 1 συνοριακή κλειστή καμπύλη. Εφόσον δεν είναι ισοτοπικά τα σύνορα τους τότε συμπεραίνουμε ότι δεν είναι ισοτοπικά μεταξύ τους.

Επειδή στη πορεία θα ασχοληθούμε μόνο με επιφάνειες, ως τοπολογικά αντικείμενα, δίνουμε παρακάτω κάποιους βασικούς ορισμούς.

Ορισμός 1.2

Έστω δύο υποσύνολα X και Y του χώρου (ή τυχαίοι τοπολογικοί χώροι). Θα λέμε ότι τα X και Y είναι *ομοιομορφικά* μεταξύ τους αν υπάρχει συνεχής, 1-1 και επί απεικόνιση από το X στο Y με συνεχή αντίστροφη. Η απεικόνιση αυτή λέγεται ομοιομορφισμός από το X στο Y . Θα λέμε επίσης ότι δυο αντικείμενα είναι τοπολογικά ισοδύναμα αν είναι ομοιομορφικά.

Ορισμός 1.3

Ως *ομοιομορφισμό επιφανειών* ονομάζουμε κάθε απεικόνιση $f: \Phi_1 \rightarrow \Phi_2$ όπου Φ_1 και Φ_2 δύο επιφάνειες, η οποία είναι 1-1, συνεχής και επί με συνεχή αντίστροφη.

Τα είδη αντικειμένων του χώρου, που θα μας απασχολήσουν, ονομάζονται *πολλαπλότητες*, για αυτό είναι σκόπιμο να δώσουμε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 1.4

Καμπύλη ή *μονοδιάστατη πολλαπλότητα* είναι ένας τοπολογικός χώρος στον οποίο κάθε σημείο έχει περιοχή ομοιομορφική με ένα ανοιχτό διάστημα.

Ορισμός 1.5

Ένας τοπολογικός χώρος είναι *συμπαγής* αν και μόνο αν είναι κλειστός και φραγμένος.

Ο παραπάνω ορισμός χαρακτηρίζει μόνο τα συμπαγή σύνολα του Ευκλείδειου χώρου.

Ορισμός 1.6

Ως *κλειστή επιφάνεια* ή *δισδιάστατη πολλαπλότητα* ορίζουμε τον συμπαγή τοπολογικό χώρο στον οποίο κάθε σημείο έχει περιοχή ομοιομορφική με έναν ανοιχτό επίπεδο δίσκο (μπάλα).

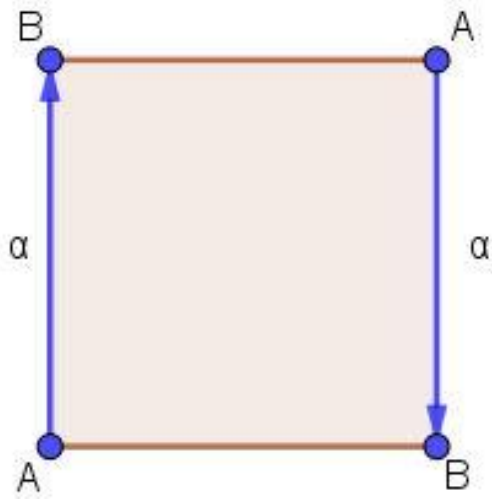
Παρατήρηση: Σύμφωνα με τον ορισμό, η τυχαία κλειστή επιφάνεια είναι συμπαγής και δεν έχει σύνορο. Μερικές κλειστές επιφάνειες είναι η σφαίρα, ο τόρος και η επιφάνεια ενός συνηθισμένου κύβου.

Οι κλειστές επιφάνειες έχουν την ιδιότητα να διαμερίζονται πολυγωνικά, δηλαδή μπορούμε να χωρίσουμε την επιφάνεια σε χωρία ώστε κάθε χωρίο να είναι ομοιομορφικό με ένα επίπεδο πολύγωνο μαζί με το εσωτερικό του. Η εικόνα οποιασδήποτε πλευράς του πολυγώνου μέσω του ομοιομορφισμού, ονομάζεται ακμή του χωρίου, ενώ η εικόνα οποιασδήποτε κορυφής του πολυγώνου ονομάζεται κορυφή του χωρίου. Δύο οποιαδήποτε χωρία του διαμερισμού είτε δεν έχουν τίποτε κοινό, είτε αν έχουν, αυτό θα είναι είτε ακριβώς μία κορυφή τους είτε ακριβώς μια πλευρά τους. Τα χωρία αυτά τα λέμε έδρες.

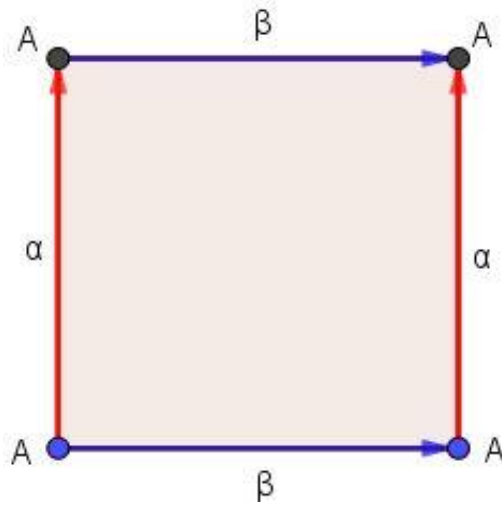
1.1 Κατασκευή επιφανειών από επίπεδα μοντέλα

Στη συνέχεια, θα χρειαστεί να έχουμε τις επιφάνειες με τη μορφή επίπεδων πολυγωνικών μοντέλων. Προηγουμένως είδαμε ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε τον κύλινδρο και τη λωρίδα Mobius από χαρτί. Στα μοντέλα αυτά δεν έχουμε περιορισμούς για το πως θα κατασκευάσουμε μια επιφάνεια και μπορούμε να κάνουμε ταυτίσεις μεταξύ των ακμών. Κάθε επιφάνεια έχει ένα επίπεδο πολυγωνικό μοντέλο, όπου κάθε πλευρά του πολυγώνου ταυτίζεται με κάποια άλλη πλευρά του. Αυτό το πολύγωνο προκύπτει «κόβοντας» την επιφάνεια κατά μήκος κάποιων κλειστών καμπυλών της. Το πολυγωνικό μοντέλο είναι συνεκτικό, συμπαγές και ομοιομορφικό με κλειστό δίσκο (Εικόνα 3).

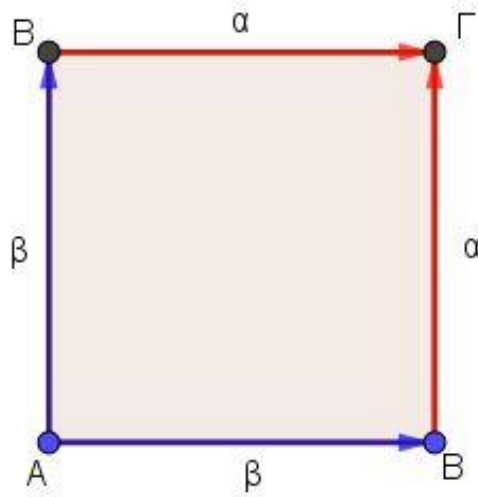
Λορίδα Mobius



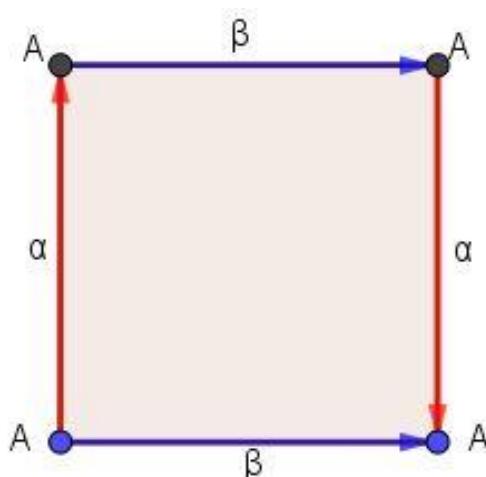
Τόρος



Σφαίρα



Μπουκάλι Klein



Εικόνα 3. Πολυγωνικά επίπεδα μοντέλα λωρίδας Mobius, τόρου, σφαίρας και μπουκαλιού Klein [GeoGebra 6.0.447.0]

Αξίζει να σημειωθεί ότι η λωρίδα Mobius ενώ δεν αποτελεί επιφάνεια σύμφωνα με τον ορισμό, μας είναι χρήσιμη και θα δούμε στη πορεία πως μπορούμε να τη χρησιμοποιούμε για να ορίζουμε τις έννοιες του προσανατολισμού και μη-προσανατολισμού στις επιφάνειες.

1.2 Επιφάνειες

Ας εξετάσουμε τώρα κάποιες επιφάνειες που θα μας απασχολήσουν στη πορεία και θα τις θεωρούμε ως δισδιάστατες επιφάνειες. Αυτές είναι ο κύλινδρος, η σφαίρα και ο κύβος. Όλα τα σημεία πάνω σε αυτές τις επιφάνειες, ακόμα και τα σημεία στις κορυφές και τις ακμές του κύβου, έχουν περιοχές οι οποίες είναι ομοιομορφικές με ένα ανοιχτό δίσκο. Ωστόσο, τα σημεία στους συνοριακούς κύκλους που έχει ο κύλινδρος έχουν περιοχές που είναι ομοιομορφικές με ένα ημι-δίσκο.

Με βάση αυτά τα παραδείγματα έχουμε παρουσιάσει μια εικόνα για τις περιοχές σημείων πάνω σε επιφάνειες.

Απλά παραδείγματα μονοδιάστατης πολλαπλότητας είναι η ευκλείδεια ευθεία καθώς και τα ανοιχτά διαστήματα αυτού. Επίσης οι ενώσεις ανοικτών διαστημάτων αποτελούν παραδείγματα 1-διάστατης πολλαπλότητας. Οποιοδήποτε σύνολο σημείων του χώρου που είναι ομοιομορφικό με κύκλο είναι μονοδιάστατη πολλαπλότητα. Ωστόσο, πρέπει να προσέξουμε ότι κάποια σύνολα ενώ φαίνονται ότι είναι

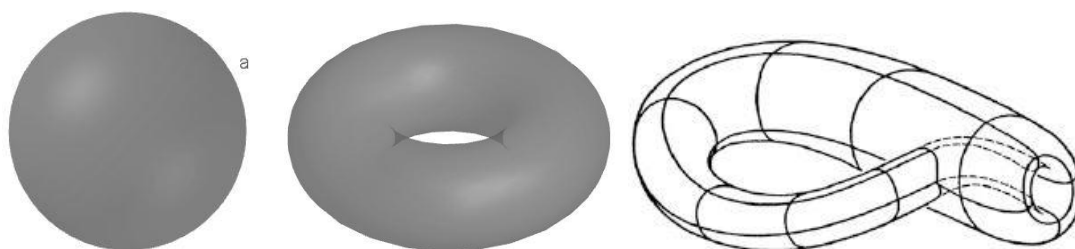
μονοδιάστατη πολλαπλότητα, στη πραγματικότητα δεν είναι! Για παράδειγμα, ένα κλειστό διάστημα των πραγματικών αριθμών δεν είναι μονοδιάστατη πολλαπλότητα καθώς τα ακραία σημεία του δεν έχουν περιοχή ομοιομορφική με ένα ανοιχτό διάστημα.

Αντίστοιχα, παραδείγματα 2-διάστατης πολλαπλότητας είναι εκείνα που βρίσκονται στο επίπεδο και είναι ο δισδιάστατος χώρος και τα υποσύνολα του που είναι ομοιομορφικά με επίπεδο ανοιχτό δίσκο. Ένα παράδειγμα δισδιάστατης πολλαπλότητας είναι το σύνολο σημείων που βρίσκεται στην ένωση δύο ανοικτών δίσκων, και είναι υποσύνολο του δισδιάστατου χώρου (Εικόνα 4).



Εικόνα 4. Παράδειγμα 2-διάστατης πολλαπλότητας. Το γκριζό τμήμα αποτελεί το σύνολο σημείων της ένωσης των δίσκων [GeoGebra 6.0.447.0]

Επιφάνειες όπως ο τόρος και η σφαίρα όπου είναι υποσύνολα του 3-διάστατου χώρου είναι 2-διάστατες πολλαπλότητες. Ομοίως και το μπουκάλι Klein που είναι υποσύνολο του 4-διάστατου χώρου είναι και αυτό 2-διάστατη πολλαπλότητα (Εικόνα 5). Εντούτοις, ο κύλινδρος και η λωρίδα Mobius (μαζί με τα σύνορα τους) δεν θεωρούνται 2-διάστατες πολλαπλότητες διότι τα σημεία πάνω στα σύνορα τους δεν έχουν περιοχές ομοιομορφικές με ανοιχτό δίσκο.



Εικόνα 5. Παραδείγματα 2-διάστατων πολλαπλοτήτων. Σφαίρα, τόρος και μπουκάλι Klein [GeoGebra 6.0.447.0 & Gallier and Xu, 2013].

Στη πορεία θα κληθούμε να ταξινομήσουμε τις πολλαπλότητες και σε αυτό θα μας βοηθήσει το να τις περιγράψουμε ως προς τον ομοιομορφισμό. Ας μελετήσουμε κάποιες ιδιότητες που ικανοποιούν οι πολλαπλότητες. Τις ιδιότητες απλώς θα τις προσεγγίσουμε.

Ορισμός 1.7

Ένας τοπολογικός χώρος είναι:

- *Συνεκτικός*, αν αποτελείται από ένα μοναδικό στοιχείο
- *Φραγμένος*, αν υπάρχει άνω φράγμα για τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων του συνόλου
- *Κλειστός*, αν περιέχει τα σημεία του χώρου που είναι όρια ακολουθιών των σημείων στο σύνολο
- *Συμπαγής*, αν είναι κλειστός και φραγμένος.

Από εδώ και ως το τέλος θα ασχοληθούμε με πολλαπλότητες που θα είναι συμπαγείς, δηλαδή κλειστές και φραγμένες. Η έννοια της συμπαγείας θα μας βοηθήσει στη πορεία για την ταξινόμηση ενώ το σύνολο μας αν είναι φραγμένο σε μια πεπερασμένη περιοχή στο χώρο δεν επεκτείνεται απείρως. Επίσης όταν μιλάμε για κλειστό σύνολο, τα φαινομενικά συννοριακά του σημεία είναι στη πραγματικότητα μέσα στο σύνολο. Οι ιδιότητες της συνεκτικότητας και της συμπαγείας είναι τοπολογικές ιδιότητες οι οποίες διατηρούνται μέσω των ομοιομορφισμών. Έτσι έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.8

Έστω X και Y δύο σύνολα του χώρου για τα οποία υπάρχει ένας ομοιομορφισμός από το X στο Y . Τότε,

- Αν X συνεκτικό τότε και Y είναι επίσης συνεκτικό
- Αν X συμπαγές τότε και Y είναι επίσης συμπαγές.

Για να πάρουμε μια ιδέα της ταξινόμησης θα δούμε εν συντομία πως μοιάζουν τοπολογικά οι μονοδιάστατες πολλαπλότητες. Αν και δεν θα ασχοληθούμε με την ταξινόμηση των καμπύλων θα αναφέρουμε το θεώρημα ταξινόμησης.

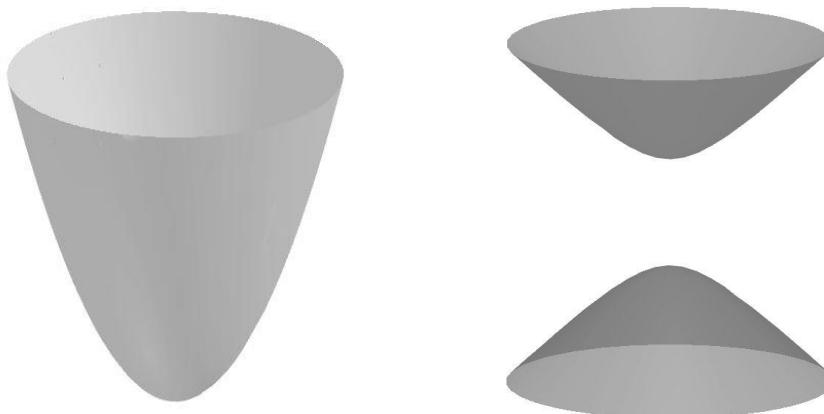
Θεώρημα 1.9

Θεώρημα Ταξινόμησης Καμπύλων

- Οποιαδήποτε συμπαγής καμπύλη είναι ομοιομορφική με έναν κύκλο ή ένα κλειστό ευθύγραμμο τμήμα
- Οποιαδήποτε μη συμπαγής καμπύλη είναι ομοιομορφική με ένα ανοιχτό ευθύγραμμο τμήμα.

Έχοντας αποκτήσει μια αντίληψη για τις καμπύλες και την ταξινόμηση τους, μπορούμε τώρα να έρθουμε στις επιφάνειες. Οφείλουμε βέβαια να διασαφηνίσουμε ποιες επιφάνειες χαρακτηρίζουμε ως δισδιάστατη πολλαπλότητα και ποιες όχι διότι στο θεώρημα ταξινόμησης θα περιοριστούμε στις συμπαγείς επιφάνειες.

Η επιφάνεια που συναντάμε στο διανυσματικό λογισμό που ονομάζεται κυκλικό παραβολοειδές είναι ομοιομορφική με τον δισδιάστατο χώρο. Αντίθετα, το δίχωνο υπερβολοειδές δεν είναι κλειστή επιφάνεια διότι δεν είναι συνεκτικό σύνολο σημείων του χώρου και αποτελείται από δύο μέρη. Το κάθε μέρος του όμως είναι επιφάνεια (Εικόνα 6). Ένας κύλινδρος, στον οποίο θεωρούμε ότι περιλαμβάνει τα σύνορα του δεν αποτελεί επιφάνεια καθώς δεν είναι δισδιάστατη πολλαπλότητα. Όμως ο ανοιχτός κύλινδρος, όπως τον ορίσαμε δεν είναι επιφάνεια γιατί δεν είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος.



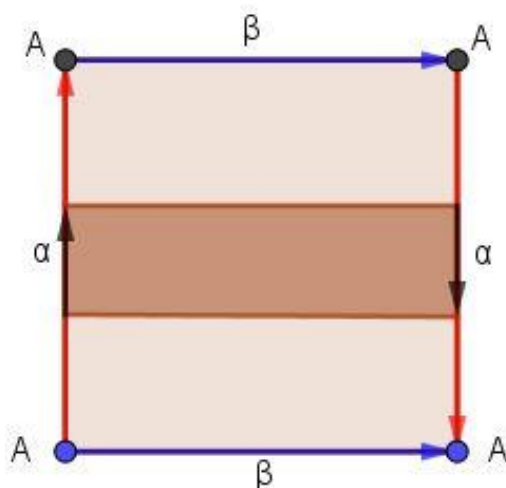
Εικόνα 6. Επιφάνειες που δεν είναι κλειστές επιφάνειες [GeoGebra 6.0.447.0]

Είναι σαφές από τις προηγούμενες επιφάνειες που αναφέραμε ότι καμία δεν είναι συμπαγής διότι καμία δεν είναι κλειστή ή φραγμένη. Αντίθετα, επιφάνειες που θα μας απασχολήσουν όπως η σφαίρα και ο τόρος είναι συμπαγείς και οι συγκεκριμένες

υπάρχουν ως υποσύνολα του 3-διάστατου ευκλείδειου χώρου. Όμως, το μπουκάλι Klein παρά το ότι είναι δισδιάστατη πολλαπλότητα-επιφάνεια, μπορούμε να το δούμε ως υποσύνολο του 4-διάστατου ευκλείδειου χώρου, αλλά όχι του 3-διάστατου, δίχως αυτοτομές.

Γεννιέται, λοιπόν, το ερώτημα πως μπορούμε να βρούμε ποιες επιφάνειες υπάρχουν στον 3-διάστατο χώρο και ποιες όχι.

Η αντιμετώπιση του παραπάνω ζητήματος μπορεί να γίνει με τη βοήθεια της έννοιας του **προσανατολισμού**. Ένα αντικείμενο θεωρείται προσανατολισμένο, όταν αυτό δεν έχει μονοπάτια αντιστροφής του προσανατολισμού του. Θα μας φανεί πολύ χρήσιμη η λωρίδα Möbius, χωρίς να μας απασχολεί το γεγονός ότι δεν αποτελεί επιφάνεια με βάση τον ορισμό που δώσαμε. Στη λωρίδα Möbius, κάνοντας μια διαδρομή κατά μήκος της διαπιστώνει κανείς ότι επιστρέφοντας στο σημείο από όπου ξεκίνησε ο τρόπος που όρισε αρχικά τον προσανατολισμό έχει αντιστραφεί! Η ιδέα αυτή θα μας βοηθήσει να βρίσκουμε ποιες είναι οι επιφάνειες, στις οποίες έχουμε προσανατολισμό. Για παράδειγμα, στο επίπεδο μοντέλο του μπουκαλιού Klein εντοπίζεται οριζόντια μια λωρίδα που ανταποκρίνεται στην λωρίδα Möbius. Άρα το μπουκάλι Klein πρόκειται για μη προσανατολίσιμη επιφάνεια (Εικόνα 7).



Εικόνα 7. Λωρίδα Möbius εντός του μπουκαλιού Klein [GeoGebra 6.0.447.0]

Επομένως δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 1.10

Εάν μια συμπαγής επιφάνεια περιέχει υποσύνολο ομοιομορφικό με τη λωρίδα Mobius θα λέγεται *μη προσανατολίσιμη*, διαφορετικά θα λέγεται *προσανατολίσιμη*.

Γενικά, οι προσανατολίσιμες επιφάνειες είναι εκείνες των συνηθισμένων στέρεων αντικειμένων που αναπαρίστανται στο χώρο. Αντίθετα, οι μη προσανατολίσιμες είναι εκείνες που υπάρχουν μόνο στον τεταρτοδιάστατο χώρο δίχως αυτοτομές. Όταν στο επόμενο κεφάλαιο συζητήσουμε για τη ταξινόμηση των επιφανειών, τα δύο αυτά είδη επιφανειών θα τα εξετάσουμε ξεχωριστά.

Κεφάλαιο 2

Ταξινόμηση των επιφανειών

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε ανάλυση όλων των συμπαγών επιφανειών και θα δούμε ότι κάθε μία είναι ομοιομορφική με το μέρος μιας συλλογής από συμπαγείς επιφάνειες. Αυτές θα τις λέμε κανονικές μορφές επιφανειών και προκύπτουν από συγκεκριμένο συνδυασμό θεμελιωδών επιφανειών που έχουμε ήδη δει σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Θεμελιώδεις επιφάνειες που έχουμε μελετήσει είναι η σφαίρα (S), ο τόρος (T), το μπουκάλι Klein (K) και το προβολικό επίπεδο (P). Πάρα το γεγονός ότι κάποια αποτελέσματα των επιφανειών θα είναι πολύ περίπλοκα μπορούμε να τα διαχειριστούμε ως αλγεβρικά αντικείμενα, που όμως δεν θα επεκταθούμε περισσότερο.

Ας ξεκινήσουμε τώρα να αναλύσουμε τη διαδικασία πως μπορούμε να συνδυάσουμε επιφάνειες μεταξύ τους και να προκύψουν νέες πιο περίπλοκες. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται **συνεκτικό άθροισμα** και είναι η πιο συνηθισμένη πράξη μεταξύ των επιφανειών και συμβολίζεται ως $\#$. Το άθροισμα αυτό προκύπτει ως εξής. Έστω δύο επιφάνειες X, Y . Αφαιρούμε από κάθε μία από τις X, Y το εσωτερικό μιας κλειστής περιοχής τους U_1, U_2 αντιστοίχως που είναι ομοιομορφική με ένα κλειστό δίσκο, και «συγκολλούμε» (ταυτίζουμε) τα σημεία των συνόρων $\partial U_1, \partial U_2$ μέσω ενός ομοιομορφισμού. Αυτό που θα παραχθεί είναι δισδιάστατη πολλαπλότητα και κατ' επέκταση συμπαγής επιφάνεια.

Επομένως το συνεκτικό άθροισμα ορίζεται ως εξής.

Ορισμός 2.1

Αν X και Y συμπαγείς επιφάνειες, το **συνεκτικό άθροισμα** των X και Y είναι η συμπαγής επιφάνεια που προέκυψε από την διαδικασία αφαίρεσης του εσωτερικού ενός δίσκου από κάθε επιφάνεια και επικόλλησης των συνοριακών κύκλων και ορίζεται ως $X\#Y$.

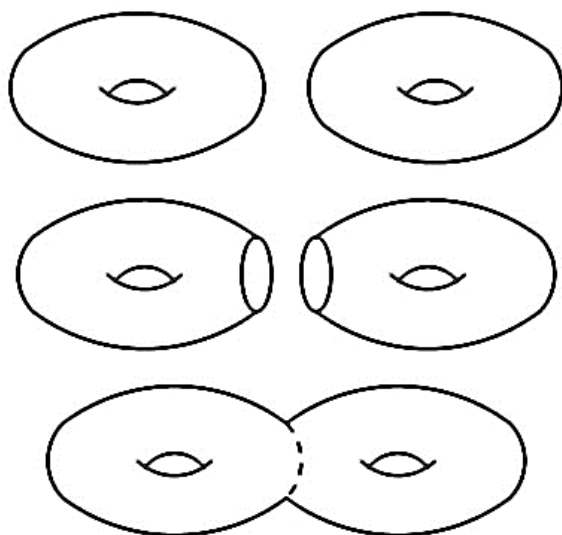
Είμαστε σε θέση τώρα να κάνουμε μερικές χρήσιμες παρατηρήσεις. Στο συνεκτικό άθροισμα δεν παίζει κανένα ρόλο το σημείο της κάθε επιφάνειας από το οποίο θα αφαιρεθεί το εσωτερικό ενός δίσκου. Επίσης, είναι μία πράξη που συμβαίνει με δύο επιφάνειες κάθε φορά. Ωστόσο μπορεί να επαναληφθεί για πεπερασμένο αριθμό επιφανειών.

Στο συνεκτικό άθροισμα ισχύουν η προσαιρετιστική και η αντιμεταθετική ιδιότητα. Αν έχουμε τρεις επιφάνειες X, Y και Z και θέλουμε το άθροισμα $X \# Y$ και Z θα προκύψει η ίδια ομοιομορφική επιφάνεια με το συνεκτικό άθροισμα των X και $Y \# Z$, άρα είναι προσαιρετιστική. Αντίστοιχα, είναι αντιμεταθετική, διότι το συνεκτικό άθροισμα $X \# Y$ είναι ομοιομορφικό με το $Y \# X$. Επομένως μπορούμε να σχηματίσουμε άθροισμα πεπερασμένου αριθμού επιφανειών δίχως να μας απασχολεί η σειρά ή πως ομαδοποιήσαμε τις αρχικές επιφάνειες.

Ας δούμε ένα παράδειγμα συνεκτικού αθροίσματος με δύο τόρους.

Παράδειγμα 2.1

Δύο τόροι από τους οποίους αφαιρούμε το εσωτερικό ενός δίσκου από τον κάθε τόρο και εν συνεχεία συγκολλούμε τα σημεία των συνοριακών κύκλων προκύπτει ο διπλός τόρος (Εικόνα 8).



Εικόνα 8. Συνεκτικό άθροισμα δύο τόρων [Balachandran et al., 2000]

Έπειτα από τα παραπάνω για τις πράξεις μεταξύ των επιφανειών είμαστε σε θέση τώρα να ξεκινήσουμε να μιλάμε για την ταξινόμηση τους. Στην αρχή του κεφαλαίου μιλήσαμε για κανονικές μορφές επιφανειών και εκτός εκείνων που αναφέραμε, θα συμπεριλάβουμε τώρα και το συνεκτικό άθροισμα n τόρων ($n \geq 1$) που θα συμβολίζουμε nT και το συνεκτικό άθροισμα m προβολικών επιπέδων ($m \geq 1$) που θα συμβολίζουμε mP . Δείχνοντας, λοιπόν, ότι οποιαδήποτε συμπαγής επιφάνεια είναι ομοιομορφική με κάποια από τις επιφάνειες σφαίρα, nT θα είναι προσανατολίσιμη ενώ αν είναι ομοιομορφική με την mP θα είναι μη προσανατολίσιμη.

Το συνεκτικό άθροισμα σφαίρας με τόρο είναι ομοιομορφικό με τον τόρο. Δηλαδή, ο τόρος, τον συμβολίζουμε $1T$, μπορεί να παραμορφωθεί έτσι ώστε να μοιάζει με σφαίρα με χερούλι. Ομοίως και ο διπλός τόρος, $2T$, να μοιάζει με σφαίρα με δύο χερούλια κ.ο.κ. Αντίστοιχα, μια σφαίρα που δεν έχει προσκολλημένο επάνω της κάποιο χερούλι μπορεί να συμβολιστεί ως $0T$.

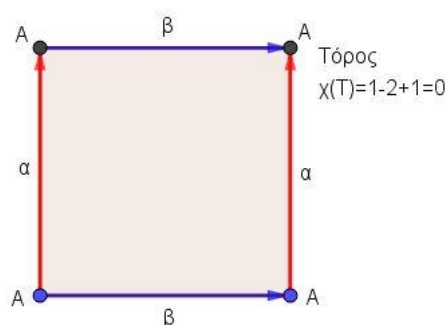
Πριν προχωρήσουμε στη διατύπωση του θεωρήματος ταξινόμησης των επιφανειών, δίνουμε μια χρήσιμη έννοια που θα μας βοηθάει στο να διαπιστώνουμε αν δύο επιφάνειες είναι ομοιομορφικές, και θα μας χρησιμεύσει και στο κεφάλαιο για τους χρωματισμούς των χαρτών. Αυτή είναι η **χαρακτηριστική του Euler** η οποία μπορεί να βρεθεί σε μια κλειστή επιφάνεια με τη βοήθεια μιας τυχαίας πολυγωνικής διαμέρισης της επιφάνειας.

Ορισμός 2.2

Αν X μια κλειστή επιφάνεια τότε ως *χαρακτηριστική του Euler* ορίζουμε τον ακέραιο αριθμό $\chi(X) = V - E + F$, όπου V , E , F οι αριθμοί κορυφών, ακμών και εδρών αντίστοιχα για οποιοδήποτε πολυγωνική διαμέριση της επιφάνειας X . Η χαρακτηριστική του Euler για οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια είναι καλώς ορισμένη.

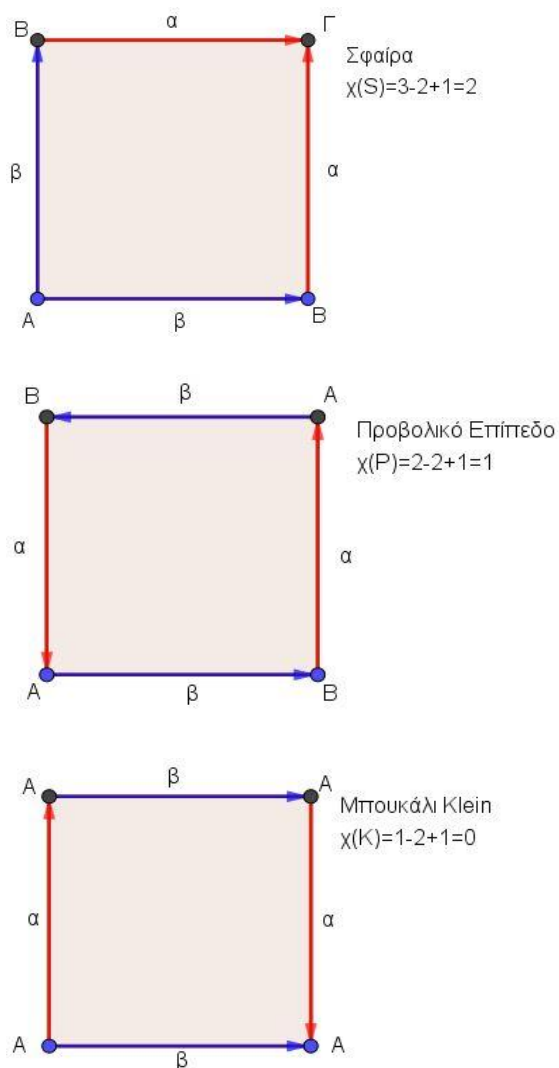
Για παράδειγμα, ο κύβος έχει 8 κορυφές, 12 ακμές και 6 έδρες άρα $\chi(X) = 8 - 12 + 6 = 2$.

Για τις επιφάνειες που μελετάμε ο υπολογισμός της χαρακτηριστικής του Euler γίνεται μέσω των επίπεδων πολυγωνικών μοντέλων. Για παράδειγμα, το παρακάτω επίπεδο μοντέλο αναπαριστά την επιφάνεια ενός τόρου, όπου τα σημεία A είναι οι κορυφές και τα α και β είναι οι ακμές του. Επειδή θα ταυτίσουμε τις κορυφές θα προκύψει μία κορυφή, καθώς και όταν ταυτίσουμε τις δύο ακμές, την α με την α και τη β με τη β , θα προκύψουν τελικώς δύο ακμές (Εικόνα 9).



Εικόνα 9. Επίπεδο πολυγωνικό μοντέλο για τον τόρο [GeoGebra 6.0.447.0]

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζεται η χαρακτηριστική του Euler για τις υπόλοιπες επιφάνειες (Εικόνα 10).



Εικόνα 10. Επίπεδα πολυγωνικά μοντέλα για τη σφαίρα, το προβολικό επίπεδο και το μπουκάλι Klein [GeoGebra 6.0.447.0]

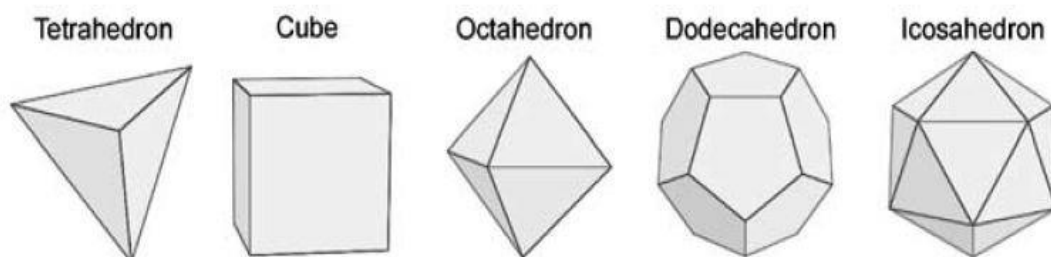
Το παρακάτω θεώρημα συνδέει τη χαρακτηριστική του Euler με την ομοιομορφία δύο επιφανειών.

Θεώρημα 2.3

Αν δύο κλειστές επιφάνειες, M_1 και M_2 είναι ομοιομορφικές τότε έχουν την ίδια χαρακτηριστική του Euler, δηλαδή $\chi(M_1) = \chi(M_2)$. Επίσης, ισχύει πως: Αν M_1, M_2 είναι και οι δυο τους προσανατολίσιμες ή και οι δύο τους μη προσανατολίσιμες και $\chi(M_1) = \chi(M_2)$, τότε οι M_1, M_2 είναι ομοιομορφικές.

Αν διαμερίσουμε πολυγωνικά τη σφαίρα σχεδιάζοντας επάνω της 4 κορυφές, 4 έδρες και 6 ακμές θα προκύψει ένα κανονικό τετράεδρο.

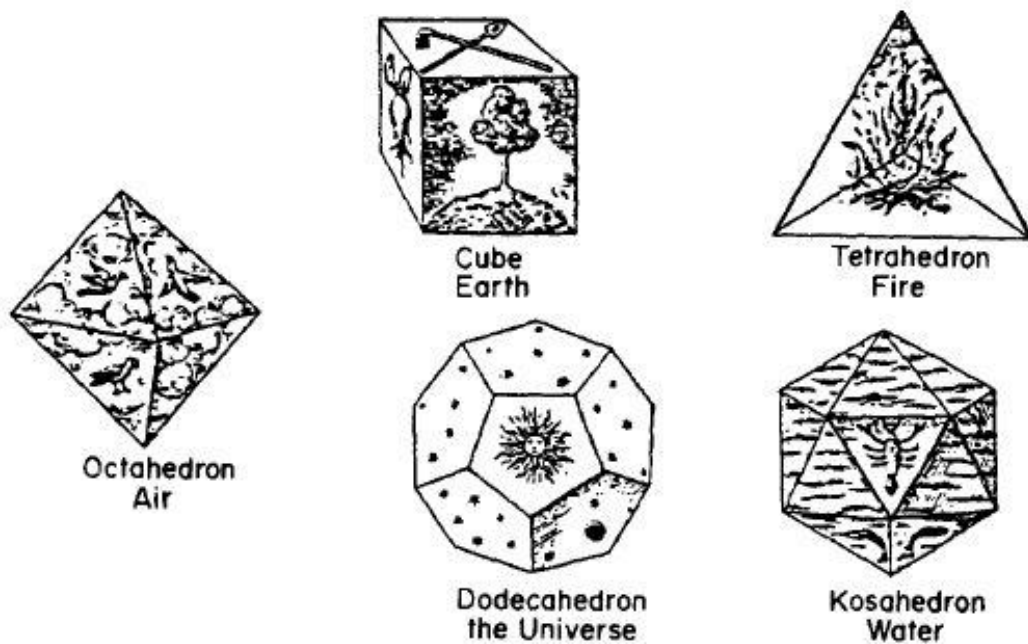
Αξίζει να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο, ότι όλα τα κανονικά πολύεδρα ή πλατωνικά στερεά όπως καλούνται, αντιπροσωπεύουν πολυγωνικές διαμερίσεις της σφαίρας. Σε αυτά περιλαμβάνονται το τετράεδρο (η πυραμίδα), το εξάεδρο (ο ρόμβος), το οκτάεδρο (ο κύβος), το δωδεκάεδρο και το εικοσάεδρο (Εικόνα 11).



Εικόνα 11. Πολυγωνικές διαμερίσεις της σφαίρας. Κανονικά πολύεδρα ή πλατωνικά στερεά [Sedig et al, 2003]

Κάθε ένα από αυτά τα πολύεδρα είναι ομοιομορφικά με τη σφαίρα καθώς έχουν την ίδια χαρακτηριστική του Euler, ίση με δύο και είναι όλα τους προσανατολισιμες επιφάνειες.

Αν κάνουμε μία ιστορική αναδρομή, θα δούμε ότι τα κανονικά πολύεδρα ονομάστηκαν πλατωνικά στερεά επειδή μελετήθηκαν στην Ακαδημία του Πλάτωνα. Στον Τίμαιο του Πλάτωνα αναφέρεται ότι τα στερεά σχετίζονται με τα δομικά στοιχεία του σύμπαντος. Το τετράεδρο συμβόλιζε τη φωτιά, το εξάεδρο τη γη, το οκτάεδρο τον αέρα, το δωδεκάεδρο τον αιθέρα ή αλλιώς το σύμπαν και το εικοσάεδρο το νερό. Στο βιβλίο, του περίφημου αστρονόμου Johannes Kepler, *Harmonices Mundi* (1619) τα πλατωνικά στερεά έχουν τη παρακάτω μορφή (Εικόνα 12).



Εικόνα 12. Τα πλατωνικά στερεά όπως περιγράφονται από τον Kepler [Kappraff, 1986]

2.1 Θεώρημα Ταξινόμησης Επιφανειών

Κλείνοντας το κεφάλαιο, και έχοντας ορίσει όλες τις απαραίτητες έννοιες θα διατυπώσουμε το θεώρημα ταξινόμησης των επιφανειών του οποίου η πρώτη εκδοχή του έγινε το 1907 από τους Dehn και Heegard. Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναπτύξουμε την απόδειξη του θεωρήματος που έδωσε το 1992 ο John H. Conway.

Θεώρημα 2.4

Θεώρημα Ταξινόμησης Συμπαγών Επιφανειών

- I. Οποιαδήποτε προσανατολίσιμη συμπαγής επιφάνεια είναι ομοιομορφική με το συνεκτικό άθροισμα mT , όπου m φυσικός και για $m=0$ έχουμε τη σφαίρα.
- II. Οποιαδήποτε μη προσανατολίσιμη συμπαγής επιφάνεια είναι ομοιομορφική με το συνεκτικό άθροισμα mP , όπου m φυσικός.

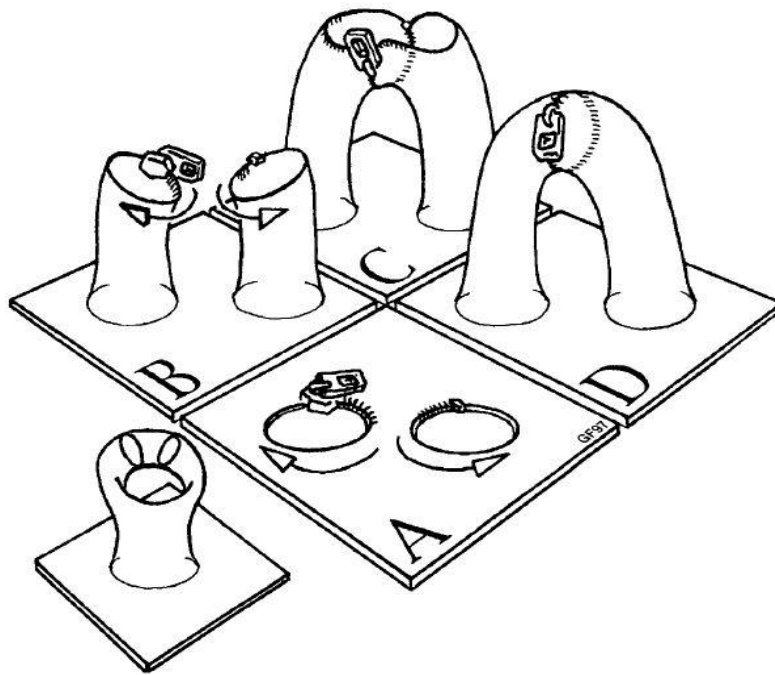
Κεφάλαιο 3

Απόδειξη του Conway

Το θεώρημα ταξινόμησης επιφανειών, ήδη γνωστό από το 1860, διαβεβαιώνει ότι όλες οι κλειστές επιφάνειες τοπολογικά είναι ισοδύναμες με σφαίρες που διαθέτουν κάποιο αριθμό χερουλιών ανεξάρτητα από τις ποικιλόμορφες μορφές που έχουν. Η απόδειξη του Conway ενώ είναι λιγότερο αυστηρή, διατηρεί την εποικοδομητική φύση της απόδειξης του θεωρήματος από τους Seifert και Threlfall στην οποία βασίζονται πολλές αποδείξεις σε βιβλία.

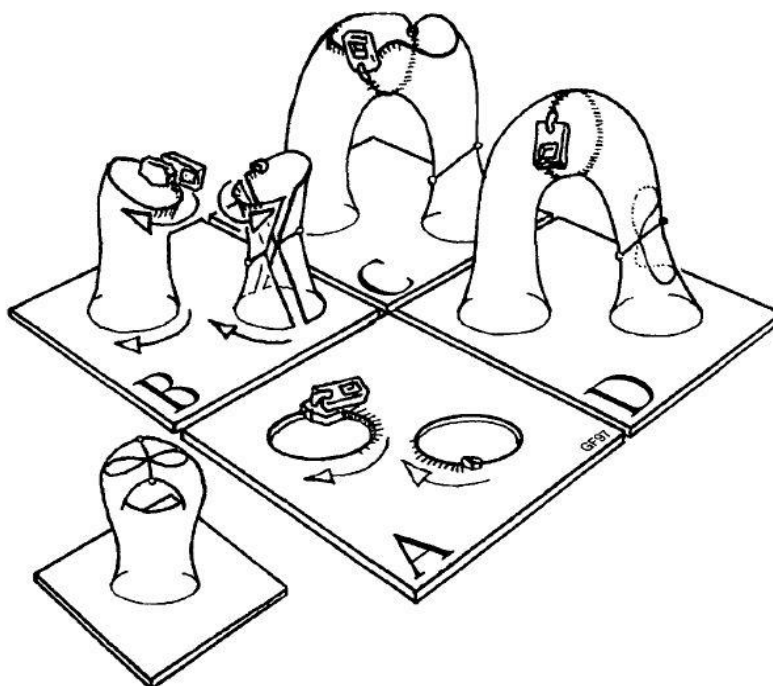
Ας δούμε πιο αναλυτικά κάποια σημαντικά στοιχεία και στη συνέχεια την απόδειξη.

Εργαζόμενοι στο χώρο της τοπολογίας οι επιφάνειες μπορούν να παραμορφώνονται ελεύθερα. Η σφαίρα, για παράδειγμα, είναι τοπολογικά ισοδύναμη ή αλλιώς ομοιομορφική με το ελλειψοειδές διότι η μία μπορεί να παραμορφωθεί κατάλληλα στο άλλο. Όμως δεν είναι ομοιομορφική με έναν τόρο επειδή δεν υφίσταται τέτοια παραμόρφωση. Γενικά, έχουμε αναφέρει ότι δυο επιφάνειες είναι ομοιομορφικές αν υπάρχει 1-1, συνεχής και επί απεικόνιση με συνεχή αντίστροφη. Στην απόδειξη όμως θα χρειαστούμε κάποια χαρακτηριστικά της τοπολογίας που θα τα εκφράσουμε σε όρους φερμουάρ. Στην εικόνα 13 βλέπουμε ότι το τετράγωνο A έχει δύο τρύπες, όπου η καθεμία διαθέτει από μισό φερμουάρ στο σύνορο της, και κουμπώνοντας τα μισά φερμουάρ μεταξύ τους, η επιφάνεια του τετραγώνου αποκτά ένα **χερούλι** που φαίνεται στο τετράγωνο D. Οπότε τα δύο τετράγωνα είναι τοπολογικά ισοδύναμα επειδή το ένα μπορεί να παραμορφωθεί στο άλλο.



Εικόνα 13. Κατασκευή χερουλιού [Francis & Week, 1999]

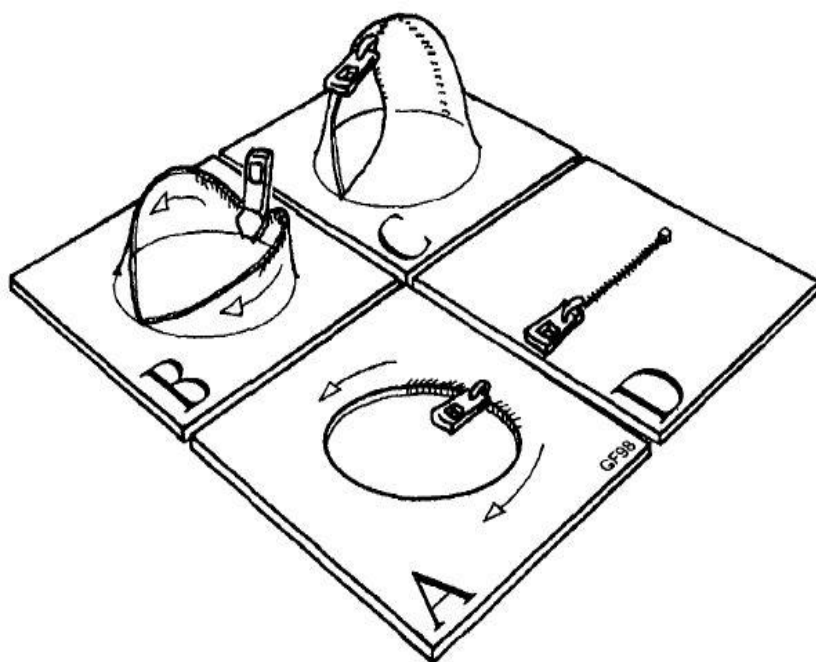
Αντίστοιχα τώρα αν αντιστρέψουμε στο τετράγωνο A τη φορά που κουμπώνουμε το φερμουάρ, για να ταυτιστούν τα δύο μισά με το σωστό προσανατολισμό, θα πρέπει αναγκαστικά ένας από τους δυο σωλήνες να περάσει μέσα από τον άλλον. Στο τετράγωνο B φαίνεται ο αυτοτεμονόμενος σωλήνας, ενώ το D δείχνει τη τελική μορφή που έχει πάρει το **τεμνόμενο χερούλι** ή **τ-χερούλι** (Εικόνα 14).



Εικόνα 14. Κατασκευή τεμνόμενου χερουλιού [Francis & Week, 1999]

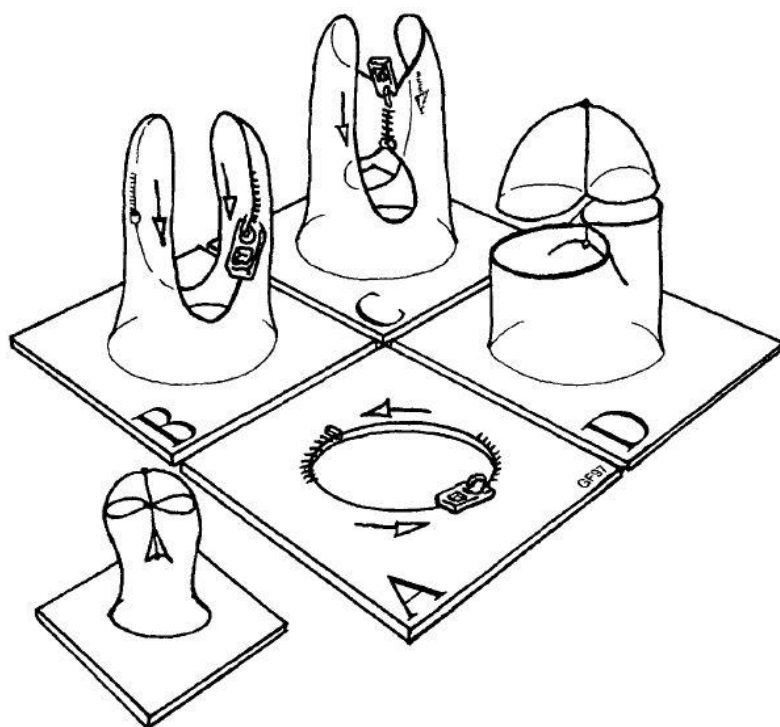
Η ιδιαιτερότητα της παραπάνω κατασκευής είναι ότι περιέχει αυτοτομή. Η αυτοτομή δεν επηρεάζει την εσωτερική τοπολογία της επιφάνειας όπως αυτή παριστάνεται στον τρισδιάστατο χώρο.

Στο πλαίσιο αυτών των κατασκευών, μία άλλη περίπτωση είναι τα δύο μισά των φερμουάρ να βρίσκονται στον ίδιο συνοριακό κύκλο και να έχουν αντίθετη κατεύθυνση. Τότε κουμπώνοντας το φερμουάρ δημιουργείται ένας **σκούφος** (Εικόνα 15).



Εικόνα 15. Κατασκευή σκούφου [Francis & Week, 1999]

Την αντίθετη περίπτωση την παίρνουμε, τροποποιώντας κατάλληλα το τετράγωνο Α ώστε τα δύο μισά να έχουν την ίδια φορά και ξεκινάμε να κουμπώνουμε. Καθώς ανεβαίνει το φερμουάρ, ενώ φαινομενικά δεν παρουσιάζει κάποια δυσκολία, φτάνοντας στη κορυφή ξεκινάει να κατεβαίνει κουμπώνοντας δύο ακόμα φύλλα. Πρακτικά δημιουργείται μία αυτοτομή στο μοντέλο μας στον χώρο, που όμως δεν επηρεάζει τη τοπολογία του αποτελέσματος (ως τοπολογικός χώρος), που είναι ο **τεμνόμενος σκούφος** ή **τ-σκούφος** (Εικόνα 16).

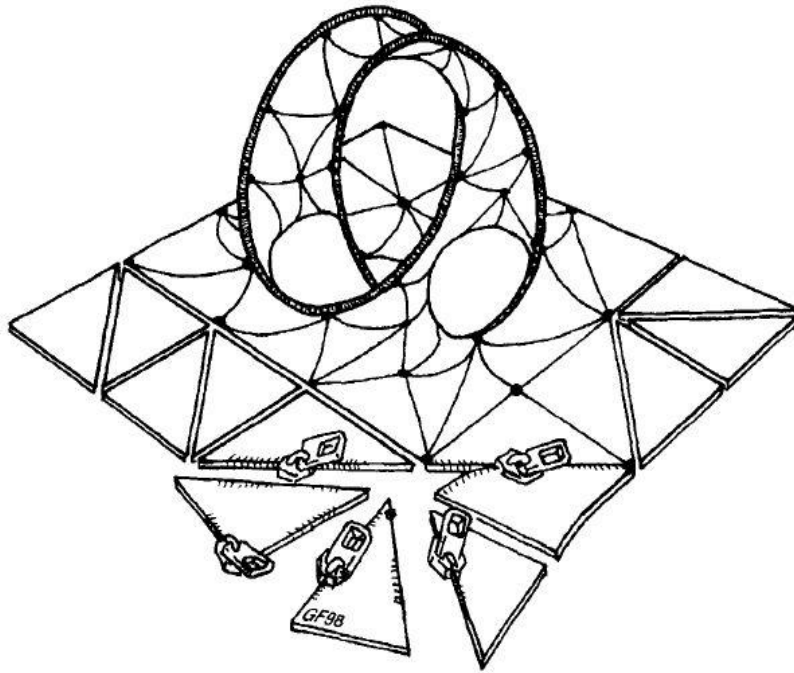


Εικόνα 16. Κατασκευή τ-σκούφου [Francis & Week, 1999]

Η ιδιαιτερότητα των παραπάνω κατασκευών (χερουλιού, τ-χερουλιού και σκούφου, τ-σκούφου) είναι ότι αποτελούν συμπαγείς επιφάνειες με σύνορο. Στις αποδείξεις, μας είναι βολικό να επιτρέπουμε και μη συνεκτικές επιφάνειες.

Παρατήρηση: Έχουμε αναφέρει σε προηγούμενο κεφαλαίο ότι οι επιφάνειες μας μπορούν να διαμερίζονται πολυγωνικά. Οπότε θα δείξουμε το θεώρημά μας εργαζόμενοι με πολυγωνικά διαμερίσιμες επιφάνειες, ή εναλλακτικά, θα το περιορίζουμε στις πολυγωνικά διαμερίσιμες.

Πριν προχωρήσουμε σε κάποιους επιπλέον ορισμούς, παραθέτουμε ένα παράδειγμα επιφάνειας την οποία έχουμε διαμερίσει και ανά ακμή τοποθετήσαμε ένα ζευγάρι φερμουάρ (Εικόνα 17).



Εικόνα 17. Επιφάνεια που έχει πολυγωνικά διαμεριστεί [Francis & Week, 1999]

Ορισμός 3.1

Διάτρηση είναι η διαδικασία αφαίρεσης του εσωτερικού ενός δίσκου από μία επιφάνεια.

Στο τετράγωνο A, της εικόνας 13, είχαμε τμήμα μιας επιφάνειας με δύο διατρήσεις.

Ορισμός 3.2

Συνήθης επιφάνεια είναι μία όχι αναγκαστικά συνεκτική επιφάνεια που είναι ομοιομορφική με μια πεπερασμένη συλλογή σφαιρών όπου κάθε σφαίρα έχει πεπερασμένο αριθμό χερουλιών, τ-χερουλιών, τ-σκούφων και διατρήσεων.

Ας δούμε τώρα μια απλή μορφή του θεωρήματος ταξινόμησης:

Θεώρημα 3.3

Κάθε επιφάνεια είναι συνήθης.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια επιφάνεια που έχει διαμεριστεί πολυγωνικά (Εικόνα 17). Εικάζουμε ότι τα κομμάτια της, αντί να συρράβονται μεταξύ τους με τετραγωνικά μπαλώματα που έχουν στις άκρες τους ραφές, είναι τριγωνικά και συρράβονται με φερμουάρ. Ξεκουμπώνοντας τα φερμουάρ, παίρνουμε μια συλλογή τριγωνικών κομματιών. Αυτά τα κομμάτια της συλλογής είναι μια συνήθης επιφάνεια, καθώς κάθε

τρίγωνο είναι ομοιομορφικό με μία σφαίρα που έχει μια μόνο διάτρηση. Είναι ευνόητο να αντιληφθούμε ότι κουμπώνοντας ξανά κάθε φερμουάρ με το ζευγάρι του, η επιφάνεια είναι πάλι συνήθης. Κουμπώνοντας ένα-ένα τα φερμουάρ με τα ζευγάρια τους, η επιφάνεια μας παραμένει να είναι συνήθης. Το γεγονός αυτό μας το εξασφαλίζει το λήμμα 1, που θα δούμε αμέσως μετά. Μόλις κουμπώσουμε και το τελευταίο φερμουάρ, έχουμε ανακτήσει την αρχική μας επιφάνεια και είναι συνήθης.

Λήμμα 1

Έστω μια επιφάνεια (όχι αναγκαστικά συνεκτική) με δύο μισά φερμουάρ σε μέρη του συνόρου της. Εάν η επιφάνεια είναι συνήθης πριν τα δύο μισά φερμουάρ κουμπωθούν μαζί, είναι επίσης συνήθης αφότου κουμπωθεί το φερμουάρ.

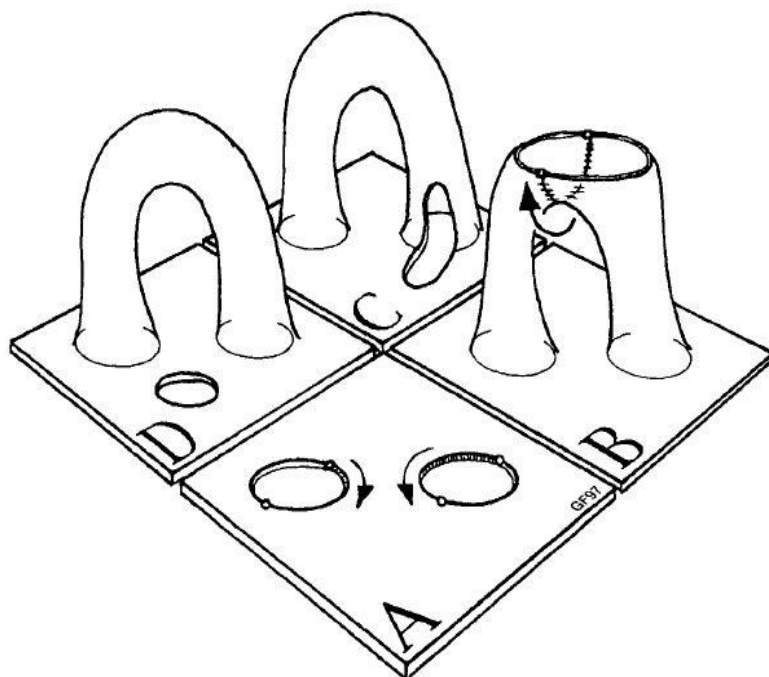
Απόδειξη

1^η περίπτωση: Κάθε ένα από τα δύο μισά φερμουάρ καταλαμβάνει πλήρως έναν συνοριακό κύκλο και οι δύο κύκλοι είναι διαφορετικοί. Αν οι δύο κύκλοι είναι στο ίδιο συνεκτικό κομμάτι της επιφάνειας τότε κουμπώνοντας τα δύο μισά φερμουάρ μπορεί μια περιοχή της επιφάνειας που αφορά τα δύο μισά φερμουάρ να παραμορφωθεί και να μετατραπεί σε ένα χερούλι (Εικόνα 13) ή αν το ζευγάρι έχει διαφορετικό προσανατολισμό τότε να μετατραπεί σε ένα τ-χερούλι (Εικόνα 14). Σε κάθε περίπτωση το αποτέλεσμα έχει τα χαρακτηριστικά του ορισμού της απλής επιφάνειας. Αν οι δύο κύκλοι βρίσκονται σε διαφορετικό συνεκτικό κομμάτι της επιφάνειας τότε κουμπώνοντας τα δύο μισά φερμουάρ ενώνουμε τα δύο κομμάτια της επιφάνειας σε ένα που έχει τα χαρακτηριστικά μιας απλής επιφάνειας.

2^η περίπτωση: Τα δύο μισά φερμουάρ καταλαμβάνουν το καθένα τους πλήρως τον ίδιο συνοριακό κύκλο. Ομοίως, κουμπώνοντας το φερμουάρ και ανάλογα τον προσανατολισμό του, δημιουργείται ένας σκούφος (Εικόνα 15) ή ένας τ-σκούφος (Εικόνα 16). Σε κάθε περίπτωση το αποτέλεσμα έχει τα χαρακτηριστικά του ορισμού της απλής επιφάνειας.

3^η περίπτωση: Τα δύο μισά φερμουάρ βρίσκονται πάνω σε συνοριακό κύκλο ή κύκλους δίχως να τους καλύπτουν πλήρως. Ας δούμε τη κατασκευή ενός χερουλιού στη περίπτωση της εικόνας 18. Κουμπώνοντας τα δύο μισά φερμουάρ, αρχίζοντας από το τετράγωνο A, δημιουργείται ένα χερούλι με μια διάτρηση στη κορυφή του όπως

φαίνεται στο τετράγωνο B. Η διάτρηση ωστόσο μπορεί να γλιστρήσει ελεύθερα πάνω στο χερούλι όπως δείχνουν τα άλλα δύο τετράγωνα (Εικόνα 18).



Εικόνα 18. Χερούλι με διάτρηση στη κορυφή [Francis & Week, 1999]

Στη γενική περίπτωση, σκεφτόμαστε πως τα δύο μισά φερμουάρ διατηρούν το μέγεθός τους, ενώ όλα τα υπόλοιπα μισά φερμουάρ γίνονται τόσο μικρά που δεν μπορούμε να τα διακρίνουμε με γυμνό μάτι. Αυτό μας στέλνει στην περίπτωση που τα δύο αρχικά φερμουάρ που δεν έχασαν το μέγεθος τους, καταλαμβάνουν πλήρως το συνοριακό τους κύκλο το καθένα οπότε κουμπώνοντας τα δημιουργούμε το χερούλι, το τ-χερούλι, τον σκούφο ή τον τ-σκούφο όπως τα είδαμε παραπάνω. Εάν όμως εστιάσουμε πολύ κοντά στις επιφάνειες, διακρίνουμε ότι πράγματι έχει μικρές διατρήσεις και μπορούμε να τις επαναφέρουμε στο πραγματικό τους μέγεθος. Το αποτέλεσμα είναι σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε, μια απλή επιφάνεια.

Στα επόμενα δύο λήμματα θα δούμε τις σχέσεις μεταξύ χερουλιών, τ-χερουλιών και τ-σκούφων.

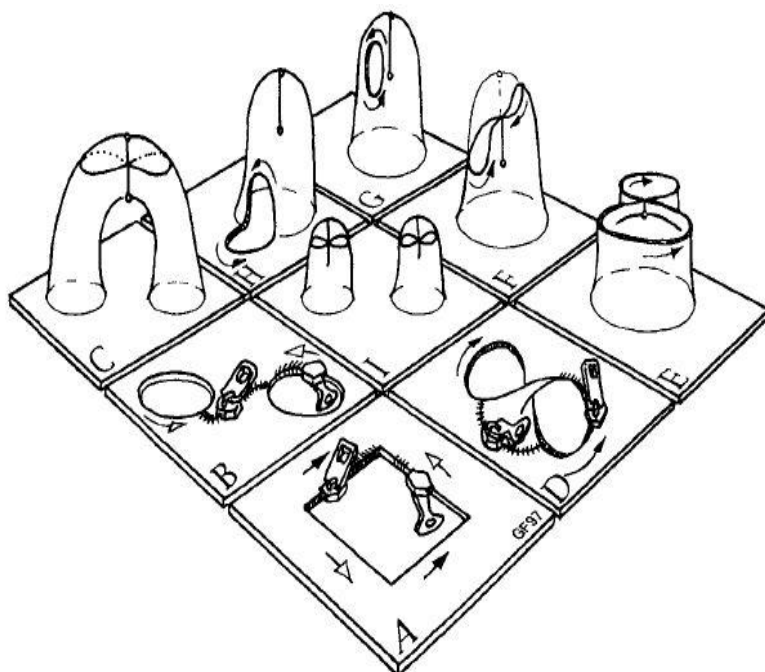
Λήμμα 2

Ένα τ-χερούλι είναι ομοιομορφικό με δύο τ-σκούφους.

Απόδειξη

Έστω μία επιφάνεια με διάτρηση μορφής Klein. Αν πρώτα κουμπωθεί το παράλληλο ζευγάρι μισών φερμουάρ, η διάτρηση χωρίζεται στα δύο, και αν στη συνέχεια κουμπωθεί το άλλο ζευγάρι τότε δημιουργείται ένα τ-χερούλι. Τα τετράγωνα A,B και C δείχνουν αυτή τη διεργασία (Εικόνα 19).

Αντίστοιχα, αν κουμπωθεί πρώτα το αντιπαράλληλο ζευγάρι μισών φερμουάρ, η διάτρηση μας αποκτά μια λωρίδα Mobius. Υψώνοντας το σύνορο της σε ένα καθορισμένο ύψος και ταυτόχρονα αφήνουμε την επιφάνεια να περάσει από κάτω, εμφανίζεται το κάτω μισό ενός τ-σκούφου. Οπτικά φαίνονται στα τετράγωνα D και E. Θεωρούμε στη συνέχεια ότι τοποθετούμε ένα προσωρινό δίσκο στο πάνω μισό του τ-σκούφου (τετράγωνο F), ολισθαίνουμε τυχαία τον δίσκο έξω από τη γραμμή αυτοτομής του τ-σκούφου και έπειτα τον αφαιρούμε (τετράγωνο G). Διώχνουμε τον δίσκο από το τ-σκούφο και κουμπώνουμε το παράλληλο ζευγάρι φερμουάρ για να φτιάξουμε δεύτερο τ-σκούφο (τετράγωνα H, I). Η εσωτερική τοπολογία της επιφάνειας δεν επηρεάζεται από το πιο ζευγάρι φερμουάρ κουμπώνουμε πρώτο, άρα καταλήγουμε ότι το τ-χερούλι είναι ομοιομορφικό με δυο τ-σκούφους (Εικόνα 19). ■



Εικόνα 19. Ομοιομορφία τ-χερούλι με δύο τ-σκούφους [Francis & Week, 1999]

Το επόμενο λήμμα είναι γνωστό και με το όνομα Θεώρημα του Dyck.

Λήμμα 3

Τα χερούλια και τα τ-χερούλια είναι ισοδύναμα παρουσία ενός τ-σκούφου.

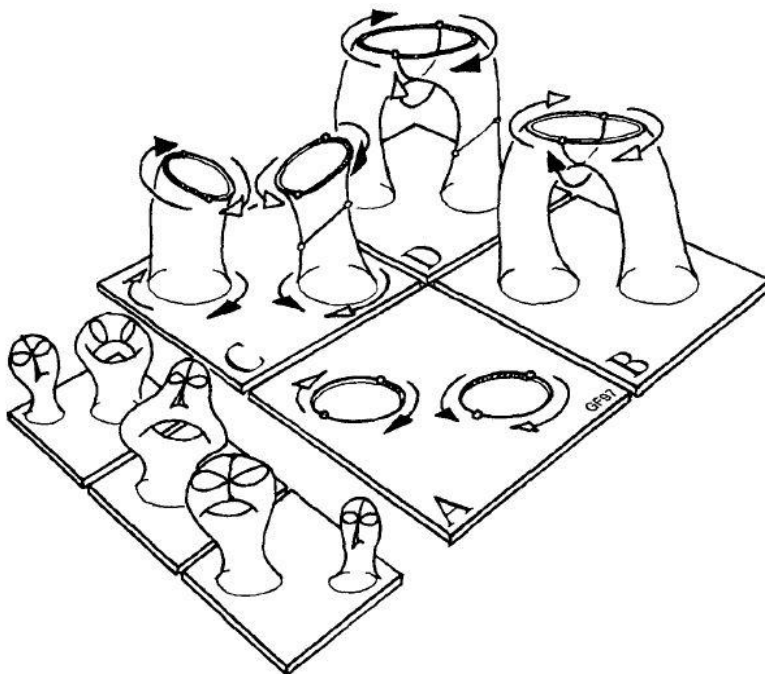
Απόδειξη

Θεωρούμε μία επιφάνεια με δύο διατρήσεις όπου τα ζευγάρια των μισών φερμουάρ είναι όπως φαίνονται παρακάτω στο τετράγωνο A (Εικόνα 20). Δηλαδή το μισό ζευγάρι από το κάθε φερμουάρ βρίσκεται σε διαφορετικό διάτρηση.

1^η περίπτωση: Αν κουμπώσουμε πρώτα τα δύο μισά φερμουάρ με τα μαύρα βέλη δημιουργείται ένα χερούλι με οδηγίες για τ-σκούφο (τετράγωνο B).

2^η περίπτωση: Αν κουμπώσουμε πρώτα τα δύο μισά φερμουάρ με τα άσπρα βέλη έχουμε ένα τ-χερούλι με οδηγίες για τ-σκούφο (τετράγωνο D) καθώς ένας εκ των δυο σωλήνων περνάει μέσα από τον εαυτό του (τετράγωνο C).

Και στις δύο περιπτώσεις ο τ-σκούφος μπορεί να ολισθήσει μακριά από το χερούλι ή το τ-χερούλι, ακριβώς όπως η διάτρηση που είδαμε στο λήμμα 1. Άρα έχουμε το αποτέλεσμα του λήμματος, δηλαδή ένα χερούλι με τ-σκούφο είναι ομοιομορφικό με ένα τ-χερούλι με τ-σκούφο. ■



Εικόνα 20. Ομοιομορφία χερουλιού με τ-χερούλι παρουσία τ-σκούφου [Francis & Week, 1999]

Ύστερα από όλες αυτές τις έννοιες είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε το θεώρημα ταξινόμησης,

Θεώρημα Ταξινόμησης

Κάθε κλειστή συνεκτική επιφάνεια είναι ομοιομορφική είτε με σφαίρα με τ -σκούφους, είτε με σφαίρα με χερούλια.

Απόδειξη

Από το θεώρημα 3.3, που αποτελούσε μια πιο απλή εκδοχή, έχουμε ότι κάθε επιφάνεια είναι συνήθης, δηλαδή είναι ομοιομορφική με τη σφαίρα που έχει χερούλια, τ -χερούλια και τ -σκούφους.

1^η περίπτωση: Η επιφάνεια έχει τουλάχιστον ένα τ -χερούλι ή ένα τ -σκούφο. Από το λήμμα 2 κάθε τ -χερούλι είναι ομοιομορφικό με δύο τ -σκούφους οπότε η επιφάνεια είναι ομοιομορφική με μία σφαίρα μόνο με χερούλια και τ -σκούφους.

Αν η επιφάνεια έχει ένα τουλάχιστον τ -σκούφο, τότε από το λήμμα 3, κάθε χερούλι είναι ισοδύναμο με το τ -χερούλι που και αυτό λόγω του λήμματος 2 είναι ομοιομορφικό με δύο τ -σκούφους και αυτό έχει ως αποτέλεσμα μία σφαίρα μόνο με τ -σκούφους.

2^η περίπτωση: Η επιφάνεια δεν έχει κανένα τ -χερούλι ή τ -σκούφο. Τότε είναι ομοιομορφική με μία σφαίρα με χερούλια μόνο.

Έχουμε αποδείξει, λοιπόν, ότι κάθε συνεκτική κλειστή επιφάνεια είναι ομοιομορφική με μια σφαίρα που έχει είτε τ -σκούφους είτε τ -χερούλια.

Παρατήρηση: Οι επιφάνειες που ορίσαμε από το θεώρημα ταξινόμησης είναι τοπολογικά διακριτές και αναγνωρίζονται από τον προσανατολισμό τους και τη χαρακτηριστική του Euler. Πιο συγκεκριμένα, μία σφαίρα με n χερούλια και χαρακτηριστική του Euler $2 - 2n$ είναι προσανατολίσιμη ενώ μία σφαίρα με n τ -σκούφους και αριθμό Euler $2 - n$ είναι μη προσανατολίσιμη.

Κλείνοντας το κεφάλαιο, ας δούμε κάποια πράγματα για την ορολογία. Η σφαίρα με ένα χερούλι είναι ένας τόρος. Αυτό προκύπτει από το συνεκτικό άθροισμα ενός τόρου και μιας σφαίρας. Ομοίως μία σφαίρα με δύο χερούλια είναι ένας διπλός τόρος, με τρία χερούλια ένας τριπλός τόρος κ.ο.κ. Η σφαίρα με ένα τ -σκούφο αποτελεί το προβολικό επίπεδο. Τέλος, η σφαίρα με δύο τ -σκούφους είναι γνωστή και με το όνομα μπουκάλι Klein και με τρεις τ -σκούφους είναι γνωστή με το όνομα επιφάνεια Dyck.

Κεφάλαιο 4

Χρωματισμοί Χαρτών

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μια εισαγωγή για ένα θέμα που ξεκίνησε στα τέλη του 19^{ου} αιώνα και αφορά τον χρωματισμό χαρτών ιδιαιτέρως στο επίπεδο. Σε ένα συνηθισμένο χάρτη απεικονίζεται η επιφάνεια της Γης, δηλαδή το χερσαίο (Ηπειροι, χώρες με σύνορα) και θαλάσσιο τμήμα της. Στον ορισμό που θα δώσουμε, ο **χάρτης** θα παράγεται από τον χωρισμό της επιφάνειας σε πολυγωνικές περιοχές όπου οι πλευρές τους θα είναι οι χώρες και θα θεωρούμε τις θάλασσες ως χώρες. Επίσης, δύο χώρες θα θεωρούνται διπλανές όταν έχουν μια κοινή συνοριακή γραμμή, όπως για παράδειγμα σε ένα συνηθισμένο χάρτη η Ισπανία με τη Γαλλία που συνορεύουν. Όμως, αυτές που θα έχουν ένα κοινό συνοριακό σημείο δεν θα θεωρούνται διπλανές. Τέλος, ο χρωματισμός χάρτη πάνω σε σφαίρα θα περιλαμβάνει ένα χρώμα για κάθε χώρα ενώ θα απαγορεύεται ο χρωματισμός με το ίδιο χρώμα για διπλανές χώρες [Ringel and Youngs, 1968].

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας έναν αυστηρό μαθηματικό ορισμό για το τι είναι ένας χάρτης, και στη πορεία θα δούμε πως μπορεί ένας χάρτης μπορεί να χρωματιστεί με N χρώματα.

Ορισμός 4.1

Χάρτης σε κλειστή επιφάνεια X είναι μια συλλογή πολυγωνικών χωρίων της X (βλ. σελ. 8) έτσι ώστε:

- Η ένωση των πολυγώνων να καλύπτει τη X
- Η τομή δύο πολυγώνων να είναι ένα σύνολο από κοινές κορυφές ή ακμές (πιθανώς κενό)
- Κάθε ακμή έχει διακεκριμένα άκρα
- Κάθε κορυφή ανήκει σε 3 τουλάχιστον ακμές.

Από τον ορισμό που δώσαμε έχουμε ότι κάθε κορυφή βρίσκεται πάνω σε τουλάχιστον 3 ακμές άρα αν V αριθμός κορυφών και E αριθμός ακμών τότε ισχύει ότι $3V \leq 2E$.

Άρα από τη χαρακτηριστική του Euler για μια επιφάνεια X προκύπτει ότι

$$\chi(X) = V - E + F \leq \frac{2E}{3} - E + F = F - \frac{E}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E \leq 3(F - \chi(X))$$

Και πολλαπλασιάζοντας με $2/F$ την τελευταία σχέση παίρνουμε

$$\frac{2E}{F} \leq 6\left(1 - \frac{\chi(X)}{F}\right)$$

Όπου $2E/F$ είναι ο μέσος αριθμός ακμών ανά έδρα.

Ένας χάρτης μιας κλειστής επιφάνειας μπορεί να χρωματιστεί με $N \in \mathbb{N}$ διαφορετικά χρώματα, αν κάθε έδρα του χρωματίζεται με ένα από τα χρώματα έτσι ώστε δυο οποιεσδήποτε διαφορετικές έδρες του, που μοιράζονται κάποια ακμή, να χρωματίζονται με διαφορετικό χρώμα.

Ορισμός 4.2

Ο *χρωματικός αριθμός* για μια κλειστή επιφάνεια X είναι ο μέγιστος μεταξύ των χρωματικών αριθμών για τους χάρτες πάνω στη X (ο χρωματικός αριθμός ενός χάρτη είναι το ελάχιστο πλήθος χρωμάτων που είναι απαραίτητα για να τον χρωματίσουμε). Ισοδύναμα ο χρωματικός αριθμός είναι ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που απαιτείται για το χρωματισμό των χαρτών πάνω στη X .

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι αν για οποιοδήποτε χάρτη μιας επιφάνειας με περισσότερες από N έδρες ισχύει $6\left(1 - \frac{\chi(X)}{F}\right) < N$ τότε όλοι οι χάρτες μπορούν να χρωματιστούν με N χρώματα. Ας δούμε την απόδειξη που θα γίνει με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής.

Είναι φανερό πως ο ισχυρισμός ισχύει για όλους τους χάρτες με $F \leq N$ έδρες. Έστω k ένας τυχαίος ακέραιος τέτοιος ώστε $k \geq N$ και ας υποθέσουμε ότι όλοι οι χάρτες πάνω στον X με k έδρες είναι N χρωματίσιμοι. Έστω τώρα ένας χάρτης με $k+1$ έδρες. Από τη στιγμή που έχουμε $k+1 > N$, γνωρίζουμε ότι $6\left(1 - \frac{\chi(X)}{F}\right) < N$ και έχουμε δείξει ότι ισχύει η $\frac{2E}{F} \leq 6\left(1 - \frac{\chi(X)}{F}\right)$. Επομένως με βάση τις δυο τελευταίες σχέσεις προκύπτει $\frac{2E}{F} < N$. Αυτό μας εξασφαλίζει ότι τουλάχιστον μια έδρα έχει λιγότερες από N ακμές.

Διαφορετικά θα είχαμε,

$$\begin{aligned} 2E &= NF_N + (N+1)F_{N+1} + (N+2)F_{N+2} + \dots \\ &\geq NF_N + NF_{N+1} + NF_{N+2} + \dots \\ &= N(F_N + F_{N+1} + F_{N+2} + \dots) \\ &= NF \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι $\frac{2E}{F} \geq N$ και είναι το αντίθετο από αυτό που έχουμε.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι D είναι η έδρα του χάρτη με τον ελάχιστο αριθμό ακμών, έστω a το πλήθος τους. Τότε $a < N$. Είμαστε σε θέση τώρα να φτιάξουμε ένα νέο χάρτη πάνω στην επιφάνεια με k ακριβώς έδρες που να καλύπτουν τη D και όλες οι ακμές και οι κορυφές να συρρικνώνονται σε ένα σημείο πάνω στην επιφάνεια. Ο νέος χάρτης μπορεί να χρωματιστεί με N χρώματα και λόγω της μαθηματικής επαγωγής μπορούμε να χρωματίσουμε όλες τις έδρες εκτός της D . Από τη στιγμή που a έδρες στο χάρτη μοιράζονται μια ακμή με τη D , χρησιμοποιούμε το πολύ a χρώματα με $a < N$, υπάρχει τουλάχιστον ένα από τα N χρώματα διαθέσιμο για να χρωματίσουμε τη D . Άρα ο χάρτης με $k+1$ έδρες είναι πράγματι χρωματίσιμος.

Οπότε προκύπτει το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 4.3

Έστω X μια κλειστή επιφάνεια και N φυσικός. Αν όλοι οι χάρτες που έχουν περισσότερες από N έδρες πάνω στην επιφάνεια ικανοποιούν την $6 \left(1 - \frac{\chi(X)}{F}\right) < N$ όπου F το πλήθος των εδρών του χάρτη, τότε όλοι οι χάρτες μπορούν να χρωματιστούν με N χρώματα.

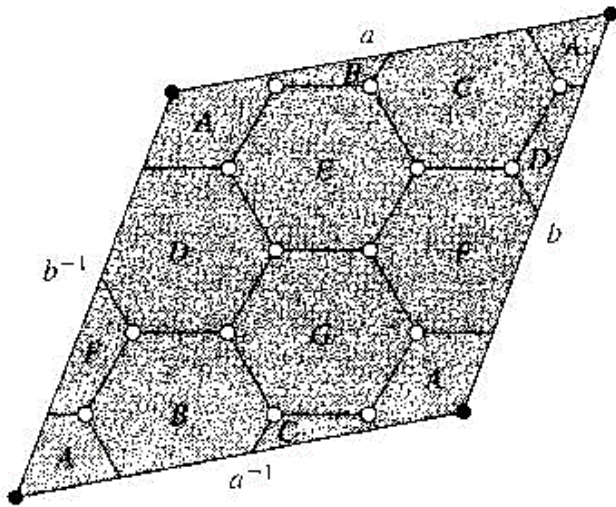
Έχει ενδιαφέρον να εφαρμόσουμε το θεώρημα για επιφάνειες που έχουν μη αρνητική χαρακτηριστική του Euler. Να θυμίσουμε ότι $\chi(T) = 0$, $\chi(S) = 2$, $\chi(K) = 0$, $\chi(P) = 1$ (βλ. Εικόνες 9 και 10).

Παρατηρούμε ότι οι χαρακτηριστικές Euler των επιφανειών της σφαίρας και του προβολικού επιπέδου για $N=6$ ικανοποιούν τη σχέση του θεωρήματος, $6 \left(1 - \frac{\chi(X)}{F}\right) < N$ και για $N=7$ τον τόρο και το μπουκάλι Klein. Δηλαδή, προκύπτει το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα

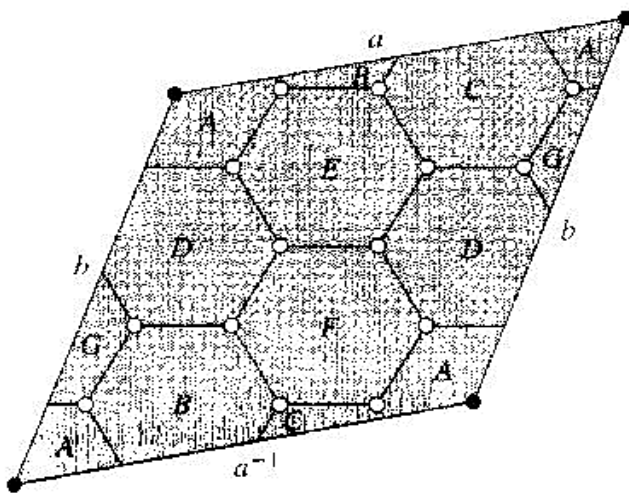
Οποιοσδήποτε χάρτης πάνω στη σφαίρα και στο προβολικό επίπεδο μπορεί να χρωματιστεί με το πολύ 6 χρώματα. Αντίστοιχα, οποιοσδήποτε χάρτης πάνω στον τόρο και στο μπουκάλι του Klein μπορεί να χρωματιστεί με το πολύ 7 χρώματα.

Ιδιαίτερος για τον τόρο, η παραπάνω παρατήρηση και το σχήμα 1, δίνουν πως ο χρωματικός του αριθμός είναι ακριβώς 7.



Σχήμα 1. Χάρτης στην επιφάνεια του τόρου που απαιτεί ακριβώς 7 χρώματα [Carlson, 2001]

Το 1890 αποδείχθηκε από τον Heawood ότι οποιοσδήποτε χάρτης πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας μπορεί να χρωματιστεί με έως πέντε χρώματα ή και λιγότερα. Ωστόσο το 1977 οι Appel και Haken απέδειξαν ότι τέσσερα χρώματα είναι αρκετά για να χρωματιστούν όλοι οι χάρτες πάνω στη σφαίρα. Αντίστοιχα το 1934 ο Franklin απέδειξε ότι ακριβώς 6 χρώματα είναι αρκετά για να χρωματιστεί οποιοσδήποτε χάρτης πάνω στο μπουκάλι του Klein (Σχήμα 2).



Σχήμα 2. Χάρτης στην επιφάνεια του μπουκαλιού Klein που απαιτεί 6 χρώματα [Carlson, 2001]

Το θεώρημα 4.4 το οποίο δίνουμε δίχως απόδειξη, συνοψίζει τον αριθμό χρωμάτων για τις κλειστές επιφάνειες που έχουμε αναφέρει ως τώρα.

Θεώρημα 4.4

Οι χρωματικοί αριθμοί των κλειστών επιφανειών είναι 4 για τη σφαίρα, 6 για το προβολικό επίπεδο, 7 για τον τόρο και 6 για το μπουκάλι του Klein.

Το παραπάνω θεώρημα, αφορούν επιφάνειες με μη αρνητική χαρακτηριστική του Euler. Τι συμβαίνει όμως όταν η χαρακτηριστική του Euler είναι αρνητική; Πως βγάζουμε συμπέρασμα για τον χρωματικό αριθμό των επιφανειών;

Την απάντηση σε αυτό το ερώτημα έδωσε ο Heawood όταν απέδειξε για τη σφαίρα ότι μπορεί να χρωματιστεί με το πολύ 5 χρώματα ή λιγότερα, αφού ουσιαστικά ταυτοχρόνως αποδείκνυε πως μπορούσε να βρει ένα άνω φράγμα για τον χρωματικό αριθμό των χαρτών ακόμα και για εκείνες τις επιφάνειες με αρνητική χαρακτηριστική Euler.

Ας δούμε την απόδειξη.

Έστω μια κλειστή επιφάνεια X με χαρακτηριστική Euler αρνητική $\chi(X) < 0$. Έστω επίσης N φυσικός και έστω πως ένας χάρτης στην επιφάνεια μας έχει περισσότερες από N έδρες, δηλαδή $F \geq N + 1$.

Τότε έχουμε $\frac{1}{F} \leq \frac{1}{N + 1}$ και επειδή $\chi(X) < 0$ τότε

$$\frac{\chi(X)}{F} \geq \frac{\chi(X)}{N + 1} \Rightarrow 1 - \frac{\chi(X)}{F} \leq 1 - \frac{\chi(X)}{N + 1} \Rightarrow 6 \left(1 - \frac{\chi(X)}{F} \right) \leq 6 \left(1 - \frac{\chi(X)}{N + 1} \right) \{1\}$$

Από προηγούμενο θεώρημα, όπου για όλους τους χάρτες μιας κλειστής επιφάνειας με περισσότερες από N έδρες, ισχύει ότι $6 \left(1 - \frac{\chi(X)}{F} \right) < N$ δηλαδή μπορούν να χρωματιστούν με N χρώματα, και με βάση την $\{1\}$ διαπιστώνουμε ότι προκύπτει η $\{2\}$:

$$6 \left(1 - \frac{\chi(X)}{N + 1} \right) < N \quad \{2\}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της με $N+1$ προκύπτει η παρακάτω ανισότητα $6(N + 1 - \chi(X)) < N(N + 1) \Rightarrow N^2 - 5N + 6\chi(X) - 6 > 0$ η οποία δεν είναι άλλη από μια ανίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού με άγνωστο το N . Την επιλύουμε υπολογίζοντας τη

διακρίνουσα και βρίσκουμε ότι $N > \frac{5 + \sqrt{49 - 24\chi(X)}}{2}$ και το ελάχιστο αυτών των τιμών του N πρέπει να είναι ίσο με $\frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(X)}}{2}$. Τον αριθμό αυτόν τον ονομάζουμε αριθμό Heawood και τον συμβολίζουμε ως $H(X)$. Επομένως έχουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 4.5

Έστω X μια κλειστή επιφάνεια με αρνητική χαρακτηριστική Euler. Ο αριθμός Heawood ορίζεται ως

$$H(X) = \frac{7 + \sqrt{49 - 24\chi(X)}}{2}$$

Έτσι μετά την απόδειξη και τον τελευταίο ορισμό ουσιαστικά αποδείξαμε το θεώρημα 4.6.

Θεώρημα 4.6

Αν X μια κλειστή επιφάνεια με αρνητική χαρακτηριστική του Euler τότε οποιοσδήποτε χάρτης πάνω στη X μπορεί να χρωματιστεί με $H(X)$ χρώματα. Δηλαδή, το $H(X)$ είναι ένα άνω φράγμα για τους χρωματικούς αριθμούς των χαρτών πάνω στη X .

Είναι ενδιαφέρον να προσέξουμε ότι ο αριθμός Heawood βρίσκει εφαρμογή και για τις επιφάνειες που έχουν μη αρνητική χαρακτηριστική του Euler, και μας δίνει ένα άνω φράγμα για τον χρωματικό αριθμό των επιφανειών που έχουμε αναφέρει ως τώρα. Συνοψίζοντας, έχουμε τον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 1. Αριθμοί Heawood για επιφάνειες με μη αρνητική χαρακτηριστική Euler

Επιφάνεια	Χαρακτηριστική Euler	Αριθμός Heawood	Χρωματικός Αριθμός
Σφαίρα	2	4	4
Προβολικό Επίπεδο	1	6	6
Τόρος	0	7	7
Μπουκάλι Klein	0	7	6

Επίλογος

Στην παρούσα εργασία πραγματευτήκαμε την ταξινόμηση κλειστών επιφανειών με βάση το θεώρημα ταξινόμησης και είδαμε πως μπορούμε να χρωματίσουμε έναν χάρτη πάνω σε μια τέτοια επιφάνεια. Στη τοπολογία μπορούμε να αφήνουμε ελεύθερη τη φαντασία μας στην παραμόρφωση των επιφανειών, διατηρώντας ωστόσο κάποιους περιορισμούς, και να πετυχαίνουμε εντυπωσιακά αποτελέσματα. Επιπλέον, είδαμε ότι είναι εφικτό να βρούμε τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων ενός χάρτη πάνω σε μια επιφάνεια. Για τη σφαίρα μάλιστα χρειάστηκε σχεδόν ένας αιώνας για να αποδειχθεί ότι απαιτούνται 4 ακριβώς χρώματα. Επίσης έγινε γνωστός ο αριθμός χρωμάτων και για τις υπόλοιπες επιφάνειες που μελετήσαμε.

Εν τέλει, η τοπολογία είναι ένας συνεχώς αναπτυσσόμενος κλάδος των μαθηματικών ο οποίος βρίσκει εφαρμογή σε πολλές επιστήμες, όπως η βιολογία, η θεωρητική φυσική, κ.ά. Για παράδειγμα, οι μοριακοί βιολόγοι ενδιαφέρονται για μια ποιοτική περιγραφή του πως το DNA, το οποίο αναπαρίσταται ως δύο υπερελικωμένες καμπύλες, τυλίγεται γύρω από τα ένζυμα και πως αυτή η δομή σχετίζεται με την δυναμική των ενζυμικών δράσεων [Carlson, 2001] και αυτό εντάσσεται στα ερωτήματα της τοπολογίας.

Βιβλιογραφία

Άρθρα

Balachandran A.P. *et al.* (2000). Quantum Topology Change in (2+1)d. *International Journal of Modern Physics A* **15** (11), 1629-1660

Francis, G. K. and Weeks, J. R. (1999). Conway's ZIP Proof. *The American Mathematical Monthly* **106** (5), 393-399

Kappraff, J. (1986). A course in the mathematics design. *Computers. & Mathematics. with Applications* **12B** (3/4), 913-948

Park, H.G. (2014). A workshop on Making Klein Bottle using 4D Frame. *Proceedings of Bridges, Seoul, Korea*

Ringel, G. and Youngs, J.W.T (1968). Solution of the Heawood Map-coloring problem. *Proceedings of the National Academy of Sciences U.S.A* **60**, 438-445

Sedig, K. *et al.* (2003). Application of Information Visualization Techniques to the Design of a Mathematical Mindtool: A Usability Study. *Information Visualization* **2**, 142-159

Βιβλία

Carlson, St. (2001). *Topology of surfaces, Knots and Manifolds: A First Undergraduate Course*, New York, John Wiley & Sons, Inc.

Gallier, J. and Xu, D. (2013). *A Guide to the Classification Theorem for Compact Surfaces, Geometry and Computing 9*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

Seifert, H. and Threlfall, W. (1980). *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Leipzig, 1934. Translated into English as *A Textbook of Topology*, Academic Press, New York, 1980

Weeks, J. (1985). *The shape of Space, how to visualize surfaces and three-dimensional manifolds*, Marcal Dekker, Inc.

Λογισμικά

GeoGebra 6.0.447.0 March 2018. Free Software Foundation, Austria.
<http://www.geogebra.org>. 19/03/2018